TRIGONOMETRIA

HISPANA,

RESOLVTIO

TRIANGVLORVM PLANI, & Sphæricj: constructio Sinuum, Tangentium, Secantium, & Logarithmorum, eorumque vsus.

AVTHORE

A. R. P. IOSEPHO ZARAGOZA, Valentino Societatis IESV in Supremâ Hispaniarum Inquisitione propositionum Fidei Censore: olim Collegij Balearici, Barcinonensi, & Valentino Theologiæ Scholasticæ, modo in Matritensi Academia Imperialis Collegij Matheseos Professore Regio.

Ad Excellentissimum Dominum D. GASPAREM DE HAROET GVZMAN, Marchionem del Carpio, & Eliche, Comitem Ducem de Olivares, ad Pontificem Maximum Regio nomine Legatum Ordinarium, &c.

SECVNDA EDITIO.

VALENTIÆ. Apud Hyeronimum de Villagrassa. Anno Dom. 1673.

Cum superiorem Licentia.

EXCELLENTISSIMO DOMINO
D. GASPARI DE HARO ET GVZMAN,
Marchioñ del Carpio, Duci de Montoro,
Comiti Duci de Olivares, Comiti de Morente,
Marchioni de Eliche, Dño Status de Sorbas,
Regiarum Arciũ, & Turrium Cordubensium
perpetuò Gubernatori, & Regalium Stabulorũ
summo Prefecto, Alguacilio maiori Civitatis
& Inquisitionis Cordubensis, perpetuò Arcium
Hispalensium, & Classium officinæ Præfecto,
& etiam Castri, & Arcis de Moxacar: Magno
Indiarum Cancellario, & Registratori eatun-
dem perpetuo, Alcantarensis Ordinis Maximo
Commendatori, Hispaniarum Regi à Cubicu-
lis, primo à Venationibus, & Regiorum
tractuum del Pardo, Valsain,
& Zarzuela Præfecto,
&c.

TRigonometriæ Hispanæ iterum in nõvam lucem prodeunti (Excellentissime Princeps) Mæcænas alius inquirendus mihi non fuit, quàm Excª. Vª. Matheseos enim dignitas cum Patronum exigit, qui splendore sanguinis, & ingenij magnitudine tantæ scientiæ nobilitatem amplificet; quę omnia in te vno adeò vigent, vt vix (si pares nostro hoc sæculo invenire liceat. Adeò illustres parentes tibi natura concesit, vt si eorum facta

nolles æmulari, degenerare non posses. Maiorum contraxisti virtutem filius progenitoribus maior, in hoc miraculus, quod virtus in te contracta maior in compendio appareat, splendidius luceat; ita enim expressisti omnes, vt dum vivis Maiorum neminem periisse, neminem in te desiderari credamus; & cum illi fuerint in nullo non maximi, dubitare liceret, in quo maior esse potueris, ni tantam magnitudinem maiorem esse potuisse in epitome, tua magnitudine comprobasses. Maiorum igitur gloria nobilis es, & nobilior tua, cùm illam summo incremento perficeris, & effeceris tuam. Eam ex factis proprijs adeptus es claritatem, vt quam ex stirpe habuisti maximam, minima tamen, ac otiosa foret, nisi quę tecum sine meritis nata, tecum merendo adulta, amplissima effecta fuerit, & immensa.

Inter virtutes, quæ maximè Heroas decent, est fortitudo facilè Princeps: fortis tamen est, non qui inter fortes nascitur, nec qui magna molitur, sed qui ardua perficit, qui fortissimè vivit, triumphator non tam aliorum sæpè, quam sæpius sui: tuam igitur fortitudinem commendat iugis de te ipso triumphus. Immania confecisse prælia magnum est, sed me iudice, ingenuas fovere artes, sapientiæ cummulare gloriam, innata magnitudine moderatè vti, maius est fortitudinis argumentum. Tygris fluviorum omnium velocissimus bellicam fortitudinem exprimit, quæ mirabili pernicitate, sonitu, ac strepore magno, cursuq; rapidissimo fertur, & obstantia, quæque proruit, & demolitur. Hæc in sui admirationem vulgares animos rapiunt, qui vnum rei corticem, & nudam superficiem corporeis oculis intuentur. Nobilibus autem, & sapientibus viris, quibus intima, & profundiora aquilino mentis obtutu rimari licèt, Tygridis rapiditati præfertur Nili profunditas, & tranquillitas summa, vt qui placido cursu immensa aquarum volumina explicans, feraces inundat campos, vniversam provintiam alluit, irrigat, & fæ-

fœcundat: tale eſt benignitatis, ſapientiæ, ac moderationis tuæ profluxium, quod te apud hoſtes commorante, nobis effluxit, cum depoſito armorum ſtrepitu, pacem Regno, tibique gloriam peperiſti immortalem: duxiſti Bellonam, vt Martem opprimeres, & generares pacem, quæ bellorum eſt finis. Bellicam ergo laudem te omnibus præripuiſſe credimus, vt qui non degener maiores tuos potentes bello, robuſtos viribus, & martiali gloria toto terrarum Orbe clariſsimos invanum expreſſeris omnes; ſed cum *vis conſilij expers mole ruat ſua*, literarum ſtudia, Matheſeos præcipue foves, quæ militarem artem perficiunt, vt in te *præclaram factis mixtam cum ſapientia fortitudo*. Duplici tum corde, tum ſenſu animi Elephantus eſſe dicitur, & altero quidem ira incendi ad bellum, altero mitigari, & leniri ad ſapientiam traditur ab Æliano: hoc quidem magnanimos decet viros, hac te ſapientia, ac generoſitate præditum adumbrati, ambiget nemo, qui egregia tua facinora in bello, & pace cognoverit. Dubium igitur mihi non eſt, quin fortitudo tua ſapiẽtia committe invicta ſit ad labores, conſtans ad pericula, ad illecebras dura, rigidior ad voluptates, & in expiabili prælio adverſus omnia vitiorum monſtra decertet. Hinc quod de Asbeſto Lycnna Poeta cecinit, de ſplendore tuo flammæ cœleſtis æmulo poſteritas iugi memoria recinet.

Evomit æterna vigiles in lampade flammas
Quas nulla Æolijs tempeſtas obruet alis.

Hæc animi magnitudo te Magno Philippo iunxit arctiſsime, Palladia hæc virtus te legatum conſtituit Regium pro Carolo Secundo ad Pontificem Maximum viribus licèt fractis, & imbecillis ex valetudine cruribus, ſed mente adeò firma, & vivida; conſilio ita certo, & ſtabili, vt ſuſpicari liceat te Romam expetere, ne Chriſtiani Orbis caput ſine tuo cerebro vixiſſe doleat poſteritas. Perge igitur, Heros maxime, in Vrbem

ſpe-

ſpectaculis aſſuetam, quæ forte ſpectáculum te ipſo nobilius non vidit unquam: perge felix, & pro tua benignitate ſine opuſculũ hoc eſſe itineris commité, tecum *ibit ibit in Vrbem* nomen vitus, licèt verecundia forte, ac rubore perfuſus, cum Trigonometria, quæ omnium eſt menſura, immenſæ tuæ magnitudinis menſuram nullam inveniat. Vale.

Excellentiſsime Domine.

Excellentiæ Veſtræ
Obſequentiſſ. in Chriſto ſervus

Ioſephus Zaragoſa.

LIBRORVM SVPERIORVM.

Imprimatur.

D. Greg. Antillon, V. G.

Imprimatur.

D. Iacobus Madrolo, F. A.

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS, Toletanæ Provinciæ Societatis Iesu.

Didacus de Valdes.

ERRORES PRIMO CORRIGENDI.

Pag.	Lin.	Error.	Corrig.	Pag.	Lin.	Error.	Corrig.
2.	27.	ABC.	BAC	58.	31.	relinquo.	reliquo.
8.	22.	MP.	AP.	64.	4.	(2.1.1.)	(1.1.2)
8.	27.	CH.	BH.	64.	12.	cbd,	cdb,
18.	23.	atur.	ator.	68.	8.	BE,	DE,
22.	25.	&c 39.	&c29.	70.	24.	mibus,	matibus,
26.	11.	cõtria.	cõtraria,	85.	25.	NE.	NC.
36.	32.	16,	19.	97.	12.	*habet*,	*haber*.
37.	3.	idus.	itur.	99.	14.	CAD.	CDA,
43.	8.	orem,	orem.	105.	24.	EOH,	EBH,
46.	15.	789.	798.	114.	24.	ACB,	ACb,
48.	2.	1338.	1238.	115.	16.	*latus*,	*Angulum*,
53.	26.	126.	128.	120.	9.	sita,	sitæ,
56.	12.	45.	54.	131.	22.	vt R,	vt B,

Corrigenda in Tabulis.

Sub gradu 1. & 2. in fine paginæ, vbi sunt numeri 179. 89. 90. corrige 178. 88. 177.

Sub gr. 22. 10. m. in ordine Sinuum, prima littera est 8. corrige 9.

Ad similes errores cognoscendos pro variis Tabulis, obseruandum est quemlibet numerum medium esse inter proximè superiorem, & inferiorem.

LE-

LECTORI.

TRigonometria per vniuersum Matheseos tractum longe diffusam mensum ferè habet vsum, ad omnes superficies Rectilineas extensum, licèt nomen vnâ Triangulorum mensuram præseferat. Huius cognitione destitutus opprobium est Mathematici, & è conuerso: *Ex Angulis latera, ex lateribus Angulos* (verba sunt Magni Vietæ) *& mixtim in Triangulis, tàm Planis, quàm Sphæricis assequi, summa gloria Mathematici est.* Trigonometriam illustrarunt Ioannes de Regiomonte, Georgius Ioachimus Rheticus, Valentinus Otho, Franciscus Vieta, P. Christophorus Clavius, Mauritius Bresius, Thomas Finkius, Lansbergius, Maginus, Pitiscus, Bassantinus, Adrianus Romanus, Benjamin Vrsinus, Longomontanus, Snellius, Neperus, Briggius, Vlac, Stevinus, Frobenius, Oughtred, Metius, Serhus Vbardus, Gellibrant, Cavalerius, Herigonius, P. Gaspar Schotus, & Illustrissimus Caramuel, quos omnes merito literarius orbis veneratur Magistros, & impensè concelebrat. Nihilominus meus iste labor, nec inutilis, neque inanis cepiebitur, vt spero, illis præcipuè, qui sedulo animadverterint difficultatem: retinendæ praxis, & demonstrationis solutionum in Trigonometria Sphærica; quæ ad vnam facillimam figuram in hoc opere redacta est. Animus fuit Trigonometriæ ipsius applicationem adiungere: postea verò hanc speciali volumini reservandam esse duxi, quod innumeris ferè Problematibus ad Mathematicarum vsum apprime necessariis refertum, vt publici iuris fiat, cito in communem lucem prodibit.

LIBER

LIBER PRIMVS

DE CANONE TRIGONOMETRICO, ET LOGARITHMIS.

TRIGONOMETRIA eſt Triangulorum menſura, vel Scientia, quæ ex conuenientibus partibus prænoſcitis, triangulorum reſolutionem docet.

Dividitur in *Planam*, & *Sphæricam*. *Plana* verſatur in Triangulis planis, lineis rectis in ſuperficie plana deſcriptis: Sphærica verò reſolvit Triangula Sphærica, quæ tribus arcubus Circuli maximi in ſuperficie Sphæræ deſcribuntur.

Vtraque Canonem Trigonometricum ad reſolutiones adhibet, numericam, ſcilicet, tabulam proportionis, quã habent rectæ Circuli cum radio, vel ſemidiametro, atque maioris compẽdii, operationumque facilitatis gratia, huiuſcn proportionis veri numeri in alios Artificiales, vel Logarithmos conuerſi ſunt.

Totum opus in tres libros distributum volui. Primus, Canonem Trigonometricum, naturam, inventionem, vsumque mirabilem Logarithmorum exprimit, quæ omnia Trigonometriæ Planæ, & Sphæricæ communia sunt. Secundus, de Trigonometria plana totus est. Tertius, autem de Sphærica.

CAPVT PRIMVM.

DE SINIBVS, TANGENTIBVS, ET Secantibus.

SInus, Tangentes, & Secantes rectæ quædam sunt, quæ ad Triangulorum solutionē considerantur in Circulo; cum autem rectarum ad id spectantium aliæ omninò intra Circulum cadant, aliæ prorsus extrà, aliæ verò partim extra partim intra, opus fuit diversa iis indere nomina distinctionis ergo. Sinus omninò intra Circulum cadūt, et Tangentes Circulū tangunt prorsusque eminent extra, Secantes illam secant, & partim extra, partim intra sunt.

2 Mathematici cuiuscunque circuli peripheriam in 360. partes divisam intelligunt, quas gradus appellant, singulos autem gradus in 60. partes, quas vocant minuta, vel scrupula prima, singula verò minuta in 60. secūda, singula secunda in 60. tertia, &c.

3 Partes Circuli sunt Angulorum mensura, vt si in puncto A. fig. 1. constituatur Angulus, & ex eo Circulus describatur, contineatque Arcus CB, gradus 60. & minuta 15. continebit etiam Angulus ABC. gradus 60. minuta 15. &c. Cum autem integer Circulus 360. gradus habeat, Semicirculus DBM. erit graduum 180. quadrans verò MB. qui mensura est Anguli recti MAB. graduum 90. quare omnes Anguli recti inter se æquantur; omnes

siquidem 90. gradibus constat. Angulus 90. gradibus maior, erit Obtusus; minor verò Acutus.

4 Complementum Anguli, vel Arcus est id, quod deficit ipsi, referturque ad Quadrantem, vel Semicirculum. Complementum Anguli obtusi semper est ad Semicirculum; *Exem gr.* sit Angulus DAC. vel Arcus DC. graduum 120. quibus demptis ex Semicirculo 180. relinquetur Angulus CAB. vel Arcus CB. graduum 60. eritque BC. complementum ad Semicirculum Arcus CD. complementum Anguli acuti esse potest ad Quadrantem, vel Semicirculum. Si Arcus CB. vel Angulus CAB. sit graduum 60. subducanturque ex Quadrante BM. 90. remanebit CM. vel CAM. graduum 30. & erit MC. complementum Arcus CB. scilicèt ad Quadrantem. Si verò BC. graduum 60. auferatur ex Semicirculo BCD. 180. relinquetur CD. graduum 120. eritque CD. complementum ad Semicirculum Arcus BC. Idem dicendum est de Angulis.

5 Diameter est linea quæ transit per centrum, & Circulum dividit in duas partes æquales, vti DB. cuius semissis AB. est *Semidiater*, vel *Radius*, qui ex centro in circumferentiam erit, & omnes Radij sunt æquales, atque etiam Diametri. Videant Tyrones Prooemialia saltem Geometriæ nostræ.

6 Linea omnium potissima Radius est, ad quam aliæ omnes circuli referuntur, & hæc in quascumq; partes dividi posset, operationú facilitas exigit, vt in vnitatem cum aliquot ciphris resolvatur, veluti in partes 10000. vel in 1000000. &c. quæ divisio inservit ad determinandam quantitatem reliquarum circuli linearum, quæ sunt chordæ, Sinus, Tangentes, & Secantes; omnes enim, vt mensurentur cum Radij partibus conferuntur.

7 *Chorda*, subtensa, vel inscripta est recta, quæ tota intra Circulum cadit, & finitur duobus punctis extremis Arcus, cui subtenditur vti GG. est chorda, vel subtensa

Arcus CDG, quia terminatur duobus punctis CG, quæ sunt eiusdem Arcus extrema.

Sinus rectus, vel *Sinus primus* est recta, quæ ab vno Arcus extremo perpendicularis incidit Diametro per extremum alium transeunti. In exemplo sit Arcus CB, & per centrum A, & punctum B, transeat Diameter DAB, & ex puncto C, cadat perpendicularis CE, erit CE. Sinus rectus, vel Sinus primus Arcus CB, & Anguli acuti CAB, ipsamet recta CE. Sinus primus erit Arcus DG, quia etiam perpendicularis est Diametro DAB, per extremum D, Arcus CD, transeunti, quare Sinus Anguli acuti CAB, Sinus quoque est Anguli obtusi CAD, videlicet sui complementi ad Semicirculum.

Sinus Totus est Sinus Quadrantis, vel Anguli recti, & est ipsemet Radius. Cum enim BM, quadrans sit perpendicularis MA, cadit in centrum A, itaque Sinus MA, est ipsemet Radius AM, & dum MA, perpendicularis maxima sit omnium, quæ in Diametrum DB, cadere possunt, erit ea etiam *Sinus Maximus*, *Sinus Totus*, vel *Totalis*, vel *Radius*, quæ vocabula idem omnino significant.

Sinus secundus cuiusque Arcus est ipsemet Sinus primus sui differentiæ ad Quadrantem, veluti si Arcus sit BG, graduum 60. demptis ipsum Quadrante 90. remanebit differentia graduum 30. & perpendicularis GO, quæ est Sinus primus Arcus CM, erit Sinus secundus Arcus CB. Si verò Arcus, sit DG, graduum 120. ablato ex eo Quadrante DM, 90. relinquetur differentia MG, graduum 30. cuius Sinus primus est CO, eritque Sinus secundus Arcus DG, cum autem in Rectangulo OE, latera opposita sint æqualia OG, AE, (ex 34. 1.) erit AE, Sinus secundus Arcus BG, & pariter Arcus GD, ita vt Sinus secundus Anguli acuti, sit ipsemet Sinus primus sui complementi ad Quadrantem, Sinus verò secundus Anguli obtusi est Sinus primus differentiæ, vel excessus quo Quadrantem superat.

Sinus Verſus, vel *Sagitta* eſt Diametri portio comprehenſa inter Sinum primum, & Circuli circumferentiam. Exempli gratia C E. eſt Sinus rectus Arcus C B. & E B. eſt Sinus Verſus Arcus C B. E D. verò, Sinus Verſus Arcus D C. ergo Sinus Verſus E B. Arcus B C. vnà cum Sinu ſecundo A E. æquatur Radio A B. & Sinus Verſus E D. [illegible] Sinu [illegible] A B. [illegible] D C. æquatur Radio A D. ergo cognito Sinu ſecundo A E. Arcus B C. ſi auferatur A E. ex Radio, vel [illegible] habetur Sinus Verſus Arcus C B. ſi autem A E. Sinus ſecundus Arcus D C. addatur Radio A D. erit D E. Sinus Verſus Arcus D C. vel Anguli Obtuſi D A C. in Angulo igitur acuto ſubducitur Sinus ſecundus, in Obtuſo verò additur Radio; & habetur Sinus Verſus: ob hanc potiſsimum cauſam calculus Tabulæ Sinuum Verſorum omittitur.

Tangens eſt linea, quæ Circulum contingit in vnico puncto, & eſt perpendicularis ad extremum Diametri, quæ tranſit per illud punctũ (7. l. 3.) Tangens iſta infinita eſſe poteſt; Tangens verò Arcus eſt recta, quæ in altero Arcus extremo Circulum contingit, & determinatur rectà, quæ à centro tranſit per extremum alterum eiuſdem Arcus vti B H. eſt Tangens Arcus B C. quia Arcum in extremo B. tangit, & finitur rectà A H. quæ à centro prodit per punctum C. dicitur *Tangens prima*, vt diſtinguatur à ſecunda.

3. *Tangens ſecunda* vnius Arcus, Quadrante minoris, vel Anguli acuti, eſt ipſamet Tangens prima ſui complementi ad Quadrantem, velut ſi Arcus ſit B C. complementum eius erit C M. & M P. eſt Tangens prima Arcus M C. dico, M P. eſſe Tangentem ſecundam Arcus B C. Pari ratione B H. quæ eſt Tangens prima Arcus B C. erit Tangens ſecunda Arcus C M. &c.

4. *Secans prima* cuiuſque Arcus, vel Anguli acuti eſt recta, quæ prodit à centro, & ſecat Tangentem primã, Secans verò *ſecunda* eſt recta, quæ ſecat Tangẽtem ſecun-

dam, ibique terminatur: veluti AH. est Secans prima Arcus BC. quia AH. terminatur ad Tangentem primã BH. sed AP. est Secans secunda Arcus CB. quia terminatur ad Tangentem secundam MP. rursus AP. est Secans prima Arcus MC. & AH. est Secans secunda eiusdem Arcus MC. ergo Tangentes, & Secantes primæ vnius Arcus, sunt Tangentes, & Secantes secundæ sui complementi ad Quadrantem, & econtra.

15 Arcus maiores 90. gradibus, & Anguli Obtusi, non habent Tangentes, & Secantes aliàs quam complementorum suorum ad Semicirculum: quare si Angulus sit graduum 120. eius Tangens prima, & secunda; item Secans prima, & secunda erit eadem, quæ graduum 60. sui complementi ad Semicirculum. Obseruatione dignum est, quoties dicitur *Sinus*, *Tangens*, vel *Secans*, absolutè subintelligitur *Sinus primus*, *Tangens prima*, *Secans prima*, quoties non additur terminus secundus, vel secunda.

CAPVT SECVNDVM.

DE FVNDAMENTIS CANONIS Trigonometrici.

16 *Differentia quorumlibet duorum Arcuum, vel Angulorum est eadem, quæ suorum complementorum ad Quadrantem, vel Semicirculum.* Fig. 1.

Sint Arcus duo DR. DL. quorum differentia est RL. complementa ad Quadrantem sunt RM. LM. & ipsorum differentia item est RL. complementa ad Semicirculum sunt RB. LB. & illorum differentia est RL. ergo semper est eadem.

17 *Sinus cuiuslibet Arcus est semissis Chordæ Arcus dupli, & Sinus duorum Arcuum proportionales sunt Chordis Arcuum duplorum.* Fig. 1.

Sit

Sit Arcus BC. eiuſque Sinus CE. productus vſque ad G. cum Radius AB. ſit perpendicularis ad CG. (ſ. 8.) æquabuntur Arcus CB. BG. item CE. EG. (2.l.3.) CE. dimidium eſt CG. & Arcus CBG. duplus CB. ergo Sinus CE. Arcus CB. eſt ſemiſsis chordæ CG. Arcus dupli CBG. igitur ſi ſumatur quilibet alius Arcus CM. & eius duplus CL. erunt proportionales: vt CO. eſt dimidium CL. ita CE. eſt dimidium CG. & alternando vt Sinus CO. ad Sinum CE. ita chorda CL. ad chordam CG. (5.l.5.)

18 *Sinus primus, & ſecundus æque poſſunt ac Radius. Sinus primus, & Sinus Verſus æque poſſunt ac Chorda. Chorda differentia duorum Arcuum, æque poteſt ac differentia eorumdem Sinuum primorum, & ſecundorum. Fig. 1.*

Sit Arcus BC. (Fig. 1.) eiuſque Sinus primus CE. Sinus verò ſecundus CO. id eſt AE. Radius eſt AC. ergo cum Angulus E. rectus exiſtat, erit quadratum ex AC. æquale quadratis AE. EC (4.l.2.) igitur AE. EC. æque poſſunt ad Radius AC. Pari ratione Arcus CL. Sinus primus CZ. & Sinus Verſus LZ. æque poſſunt ac Chorda LC. quoniam quadratum LC. æquatur duobus quadratis CZ. ZL. Rurſus Chorda GN. differentia Arcuū BN. BG. æque poteſt ac KG. differentia Sinuum primū GE. SN. & KN. differentia Sinuum ſecundorū GX. NI.

19 *Sinus primus vnius Arcus medio loco proportionalis eſt inter ſemiſſem Radij, & Sinum Verſum Arcus dupli.* Fig. 2.

Sit Arcus DL. & DLC. duplum eius: erit DZ. Sinus primus Arcus LD. & DE. Sinus Verſus Arcus DLC. cū Triangula DZA. DEC. habeant angulos ad Z. & E. rectos, & Angulum ad D. communem, æquiangula ſunt (3.l.1.) ergo vt DE. ad DC. ita DZ. ad DA. (2.l.6.) & alternando vt DE. ad DZ. ita DC. ad DA. (5.l.5.) igitur vt DE. ad DZ. ita DZ. ſemiſsis DC. ad ſemiſſem Radij DA. (4.l.5.) ergo DZ. Sinus primus Arcus DL. me-

dio loco proportionalis est inter Sinum Versum D E. Arcus dupli D L C. & Semiradium D A. &c.

20 *Radius medius proportionalis est inter Tangentem Arcus primam, & secundam. Fig. 1.*

Sit Arcus B C. eius Tangens prima B H. & M P. Tangens secunda cum M A. B H. perpendiculares sint ad B A. erunt parallelæ (13. P.) & Anguli Alterni M A P. A H B. æquales (2. l. 1.) & Anguli M. B. recti æquales. ergo Triangula A M P. H B A. sunt Equiangula (3. l. 1.) igitur proportionales sunt H B. Tangens prima ad B A. Radium, vt A M. Radius ad M P. Tangentem secundã (2. l. 6.) quare Radius medius est inter Tangentem primam & secundam.

21 *Radius medius proportionalis est inter Sinum primum, & Secantem secundam vnius Arcus, vel inter Sinum secundum, & Secantem primam. Fig. 1.*

Sit Arcus B C. cuius Sinus primus est C E. & Secans secunda A P. cum sint Equiangula. (vt antea) Triangula A M P. C E A. erunt proportionalia: vti C E. Sinus primus ad C A. Radium; ita A M. Radius ad A P. Secantem secundam (2. l. 6.) ergo Radius medius est inter Sinum primum C E. & Secantem secundam M P. vel inter G E. Sinum secundum Arcus M G. & A P. Secantem primam eiusdem, &c.

22 *Radius ad Tangentem Arcus rationem habet, quam Sinus secundus ad Sinum primum, eiusdem Arcus. Fig. 1.*

Sit Arcus C B. eius Tangens C H. Sinus primus C E. Sinus secundus C O. vel A E. cum A B. perpendicularis sit ad E C. B H. (5. 8. & 12.) erunt C E. B H. parallelæ (13. P.) ergo vt A E. Sinus secundus ad E G. Sinum primum, ita A B. Radius ad B H. Tangentem (2. l. 6.)

23 *Radius ad Secantem primam vnius Arcus rationem habet, quam Sinus primus ad Tangentem primam. Fig. 1.*

In iisdem Triangulis A C E. A H B. Radius A C. est ad Sinum primum C E. vti Secans A H. ad Tangem

sem

tem HB. (2.l.6.) ergo alternando AC. Radius ad AH. Secantem, est vt Sinus CE. ad Tangentem HB.

24 *Radius eandem rationem habet cum Secante 1. quam Tangens 2. cum Secante 2.* Fig. 1.

Sit Arcus B C. cuius Secans 1. est A H. Tangens 2. M P. & Secans 2. A P. in Triangulis similibus A M P. H B A. sunt proportionales M P. Tangens 2. ad P A. Secantem 2. vt B A. Radius ad A H. Secantem 1. (2.l.6.)

25 *Sinus 1. & 2. vnius Arcus directè proportionales sunt cum Secante 1. & 2. eiusdem Arcus.* Fig. 1.

Sit A. Sinus 1. B. Sinus 2. Sit C. Secans 1. A. B. D. Secans 2. R. Radius, cum Radius medium R. proportionale sit inter A. & D. (§. 21.) erit C. D. Rectangulum ex A. in D. æquale Quadrato Radij (1.l.6.) & quoniam ipsemet Radius medium proportionale est inter C. & B. (§. 21.) erit Quadratum ex Radio æquale Rectangulo sub C. & B. (1.l.6.) ergo Rectangulũ ex A. in D. æquale est Rectangulo sub C. & B. (3.P.) ergo latera reciprocè proportionalia sunt, vt A. Sinus 1. ad B. Sinum 2. ita C. Secans 1. ad D. Secantem 2. (1.l.6.)

26 *Tangens 1. & 2. vnius Arcus reciprocè proportionales sunt cum Sinu 1. & Secante 2. vel cum Sinu 2. & Secante 1. eiusdem Arcus.*

Sit A. Tangens 1. R. Radius. B. Tangens 2.
Sit C. Sinus 1. R. Radius. D. Secans 2.

Cum Radius medius sit inter A. & B. (§. 20.) erit Rectangulum ex A. in B. æquale Quadrato ex Radio (1.l.6.) & quia Radius medius quoque est inter C. & D. (§. 20.) erit Rectangulum sub C. & D. æquale Quadrato ex Radio (1.l.6.) ergo Rectangulum ex A. in B. æquatur Rectangulo sub C. & D. (3.P.) ergo latera reciproca proportionalia sunt (1.l.6.) vt A. Tangens 1. ad C. Sinum 1. ita D. Secans 2. ad B. Tangentem 2. Idem est de Sinu 2. & Secante 1. propter eandem rationem.

27 *Tangentes 1. & 2. cuiuſque Arcus reciprocè proportionales ſunt cum Tangente 1. & 2. cuiuslibet alterius Arcus: vel cum Sinu 1. & Secante 2. vel cum Sinu 2. & Secante 1. Item Sinus 1. & Secans 2. vnius Arcus reciprocè proportionales ſunt cum Sinu 1. & Secante 2. vel cum Sinu 2. & Secante 1. cuiuſque alterius Arcus, & è contra.*

Demonſtratio eadem prorſus eſt, quia Radius media eſt inter hoa, & illos (§. 20. & 21.) ergo Rectangula erunt æqualia, & latera reciproca, vt anteà (1. l. 6.)

28 *Chorda differentiæ duorum Arcuum ad differentiam Sinuum 2. eorundem eandem habet, quam Radius ad Sinum Arcus intermedij.* Fig. 1.

Sint duo Arcus BN. BG. ipſorum differentia NG. & recta GN. chorda differentiæ Arcuum. Sinus 2. Arcuum ſunt NL. GK. & eorum differentia NK. cum AT. perpendicularis ſit ad chordam GN. bifariam ſecabit chordam, & Arcum (2. l. 3.) ergo Arcus BT. eſt Arcus intermedius, cuiuſque Sinus TF. igitur quia GE. perpendicularis eſt ad BA. & AT. ad GN. & Anguli Verticales AVE. GVT. ſunt æquales æquabitur EAV. Angulo VGN. (3. l. 1.) ergo quia VGN. cum GNK. vnum rectum efficit, & AVE. cum EAV. conſtituit quoq; rectũ, æquales erunt etiam EVA. GNK. & cum æquales ſint AVE. ATF. (2. l. 1.) æquales item erunt ATF. GNK. igitur Triangula Rectangula ATF. GNK. Æquiangula ſunt (3. l. 1.) & latera proportionalia (2. l. 6.) ergo chorda GN. ad NK. differentiam Sinuum ſecundorum eſt, vt Radius AT. ad Sinum TF. Arcus intermedij BT.

Aliæ proportiones reperiuntur apud Lansbergium, Clavium, & alios, quas omnino, quia ad noſtram methodum ſuperfluæ ſunt.

CAPVT TERTIVM.

DE LATERIBVS FIGVRARVM regularium.

29 LAtera figurarum regularium, atque Sinus inde exorti eò erunt exactiores, quo Radij divisio maior existet, & quia in extractione Radicum irrationalium elici nequit numerus verus, & ijs operationum continuatione augetur error, vt evadat iste insensibilis, expedit quatuor, vel sex cyphras addere Radio præter eas, quæ in Sinuum Tabulam electæ fuerint: veluti si Sinus inuestigandi sint ad Radium 100. 000. 000. sumatur ad operationem Radius 1000. 000. 000. 000. & ex Sinibus inventis reijciantur quatuor litteræ ad dextram, & Sinus absque errore sensibili remanebunt.

De latere Hexagoni.

30 Latus Hexagoni est ipsemet Radius circuli (5. p. 3. Geometriæ Practicæ) ergo si Radius statuatur 1000. 000. 000. 000. hic etiam erit valor lateris Hexagoni.

De latere Trianguli. Fig. 2.

31 Circulo in sex partes diviso, est A B C. Triangulũ æquilaterũ (5. p. 3.) & ducta B D. erit ipsa latus Hexagoni: ergo cum Angulus A B D. in Semicirculo rectus sit (3. l. 3.) Quadratum ex A D. æquabitur duobus Quadratis A B. B D. (4. l. 2.) & quia A D. Diameter dupla est Radij A B. erit A D. 2000. 000. 000. 000. eius Quadratum 4000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. & cum B D. sit latus Hexagoni æquale Radio, erit tetus Quadratum 1000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. quo sublato ex Quadrato A D. remanebit Quadratũ ex A B. 3. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. cuius radix quadrata est latus Trianguli A B. 1732050807568.

De latere Quadrati. Fig. 3.

32 Si duæ Diametri AB. CD. secantur ad Angulos rectos, erunt CA. AD. latera Quadrati (5. p. 4.) ergo quia Angulus ad A. rectus est, duo Quadrata CA. AD. æquabuntur Quadrato ex CD. (4. l. 2.) cumque DA. AC. sint æquales; vnum quodque Quadratum dimidium erit Quadrati CD. ergo existente Quadrato 4.000.000.000.000.000.000.000.000. cuius semissis 2000.000.000.000.000.000.000.000. est Quadratum ex AC. cius radix quadrata erit latus AC. 1414213562373.

De latere Pentagoni. Fig. 4.

33 Sit BC. Diameter, DA. Radius, perpendicularis, DE. dimidium DC. fit EF. æqualis ipsi EA. & ducantur AF. quæ erit latus Pentagoni. Ita practicos operari ait Caramuel in sua Geometria, pag. 333. & quærit: *An ne bene?* Illam per Sinus probat, & ita concludit: *Ergo secura est regula.* Nequeo satis mirari tantum Mathematicum Sinus adhibuisse in examen propositionis à Ptolomeo demonstratæ, *lib. 1. cap. 9. Almag.* ac deinceps à Clavio, & Herigonio *in Schol. prop. 10. lib. 13.* & à pluribus alijs: demonstratur etiam in nostra Geometria Minimorum, *part. 2. prop. 167.* vnde Sinus per hanc examinandi sunt, non è converso.

34 Quadratum AB. æquatur ED. DA. & AF. ipsis FD. DA. (4. l. 2.)

Qum AD.	1000000000000000000000000
Qum DE.	250000000000000000000000
Qum AE.	1250000000000000000000000
Eius Radix Qa est latus AE. vel EF.	1118033988749
ED. est dimidium Radij.	500000000000
Dempta ED. ex EF. est FD.	618033988749
Qum FD. est	381966011248999058585001
Qum AD est	1000000000000000000000000
Summa Qum	1381966011248999058585001
Eius Radix Qa est AF.	1175570504584

Et est latus Pentagoni, vti iam diximus. De

De latere Quindecagoni. Fig. 5.

35 Sit ABDEG. Pentagonum, & ACF. Triangulum. Arcus AB. BD. graduum 72. eritque ABD. graduum 144. cum verò AC. circuli sit tertia pars, graduum 120. erit CD. graduum 24. Arcus Quindecagoni, quia autem ABH. AGH. Semicirculi æquales sunt, si demantur Arcus æquales ABD. AGE. relinquentur æquales DH. HB. ergo Radius ZH. bifariam secat chordã DE. & est ipsi perpendicularis, item CF. (2.l.3.) eruntq; DB. CF. parallelæ inter se, vti etiam perpendiculares ad illas DS. RP. (13.P.) igitur cum Quadratum ex CD. æquetur Quadratis CS. & DS. (4.l.2.) inventis CS. & DS. repertaerit, & CD. quæ latus est Quindecagoni.

36 *Praxis talis est.*

CF. latus Trianguli.	173205080756 8
DE. latus Pentagoni.	117557050458 4
CP. est dimidium CF.	866025403784
DR. est dimidium DE.	587785252292
Differentia est CS.	278240151492
Qum CP.	749999999999240241512656
Qum DR.	345491502811970091253264

Ablatis ex Quadrato Radij ZC. & ZD. remanebunt quadrata ex ZP. & ZR. (4.l.2.)

Qum ex ZP.	250000000000759758481344
Qum ex ZR.	654508497188029908746736
Radix quadrata est ZP.	500000000000
Radix quadrata est ZR.	809016994375
Differentia est PR. vel SD.	309016994375
Differentia CP. & DR. est CS.	278240151492
Qum ex SD.	954915028125587816406 25
Qum ex CS.	774175819022911098260 64
Summa est.	1729090847148498914666 89
Eius Radix quadrata est CD.	41582338163 5
Et hæc est latus Quindecagoni.	

Delatere Decagoni. Fig. 5.

37 Latus Decagoni eſt DH. atque eius Quadratum æquale Quadratis DR. RH.

Radius ZH eſt.	1000000000000
ZR. per §. 36. eſt.	809016994375
Differentia eſt RH.	190983005625
Dr. per §. 36. eſt.	587785252292
Qum ex RH eſt.	36474508437558781640625
Qum ex DR. eſt.	34549150281197009253264
Duorum ſumma.	38196601124952887289889
Radix quadrata eſt DH.	618033988749

Atque hoc eſt latus Decagoni, eodem modo reperientur figuræ omnes duplorum laterum.

CAPVT QVARTVM.

METHODVS INVESTIGANDI SINVS, Tangentes, & Secantes exponitur.

38 *Inuenire Sinus graduum* 60. 45. 36. 30. 18. *& 12. item Sinus complementorum ſuorum.*

Quoniam ſemiſsis chordæ Sinus eſt dimidij Arcus (§. 17.) Triangulum verò gradus 120. ſubtendit, Quadratum 90. Pentagonum 72. Hexagonum 60. Decagonum 36. Quindecagonum 24. ſemiſses chordarum, erunt Sinus dimidiorum Arcuum.

	Arc.	*Chordæ.*	*Gr.*	*Sinus.*
Triang.	120	173205080756	60	866025403784
Quadr.	90	141421356237	45	707106781186
Pentag.	72	117557050458	36	587785252292
Hexag.	60	100000000000	30	500000000000
Decag.	36	61803398874	18	309016994374
Quinde.	24	41582338163	12	207911690817

Invenire Sinus complementorum.

39 Quoniam Sinus 1. & 2. æque possunt ac Radius (§. 18.) si Quadratum ex Sinu 1. subducatur ex Quadrato Radij, & a residuo extrahatur Radix quadrata; erit hæc Radix Sinus 2. vel Sinus complementi.

Sinus 1. gr. 36. est.	587785252292
Sinus Quæ est.	345491502811970091253264
Quæ ex Radio.	1000000000000000000000000
Residuum est.	654508497188029908746736
Radix quadrata est Sinus 2. gr. 36.	809016994374

Atque etiam Sinus 1. complementi sui, quod est graduum 54. hac arte reperientur Sinus secundi, si cognoscantur primi, & vice versa primi, si cognoscantur secundi.

Grad.	*Sinus.*	*Complement.*	*Sinus.*
60.	866025403784	30	500000000000
45	707106781186	45	707106781186
36	587785252292	54	809016994374
30	500000000000	60	866025403784
18	309016994374	72	951056516295
12	207911690817	78	978147600733

Invenire Sinus semissis, vel Arcus dupli.

40 Quoniam Sinus 1. vnius Arcus medio loco proportionalis est inter Semiradium, & Sinum Versum Arcus dupli (§. 19.) si Sinus Versus ducatur in Semiradium, Radix quadrata producti erit Sinus 1. dimidij Arcus. Si verò Sinus Arcus multiplicetur per Semiradium; Radix quadrata producti erit Sinus Versus Arcus dupli, eius autem differentia ad Radium erit Sinus 2. eiusdem Arcus dupli, & per §. 39. invenietur Sinus 1.

Ex Arcu gr. 12. & quæritur Sinus gr. 6. & 24.

Radius.	100000000000
Sinus 2.gr.12.	97814760073 3
Sinus Verſus gr.12.	21852399267
Semiradius.	500000000000
Productus.	10926199633500000000000
Eius Radix quadrata eſt Sinus gr.6.	104528463267
Eius Sinus 1. per §. 39. eſt.	9945218953 68

41 Pari artificio reperientur Sinus 1.& 2. graduũ 3. inſuper 1.*gr.* 30.*min.* deinde Sinus *min.* 45. Tandem Sinus dimidiorum complementorum, &c.

Grad.	*Sinus.*	*Compl.*	*Sinus.*
12. 00	207911690817	78. 00	968147600378
6. 00	104528463267	84. 00	994521895368
3. 00	51335956242	87. 00	998629534754
1. 30	26176948307	88. 30	999657324975
0. 45	13089595571	89. 15	999914327574

42 Præterea inveniuntur Sinus dimidiorũ complementorũ. Et quoniam Sinus 2.gr.78.eſt 207911690817. ſubducto eo ex Radio, ſupererit Sinus Verſus 792088309183 qui multiplicatus per Semiradium, & eruta radice quadrata; Sinus 1. graduum 39. erit 629320391049. & Sinus 1. per §. 39. erit 777145961456. eodem pacto reperientur omnes ſubſequentes.

39. 00	629320391049	51.00	777145961456
19. 30	333806359233	70.30	942641491092
9. 45	169349503849	80.15	985556059058
42. 00	669130606358	48.00	743144825477
21. 00	358367949545	69. 00	933580426407
10. 30	182235525492	79.30	983254907563
5. 15	91501618663	84.45	995804927574
43. 30	688354575693	46.30	725374371012
21. 45	370557437509	68.15	928809552871
44. 15	697790459841	45.45	716301943424

43 *Insuper Sinus semissis horum complementorum.*

25.30	430511096808	64.30	902585284349
12.45	220697435021	77.15	975342320508
35.15	577145190073	54.45	816641555161
24.00	406736643075	66.00	913545457642
34.30	566406236924	55.30	824126188622
17.15	296541574975	72.45	955019944457
39.45	639439001980	50.15	768841832073
23.15	394743856384	66.45	918791210148

44 *Deinde Sinus semissis horum complementorum.*

32.15	533614515915	57.45	845727821703
33.00	544639035015	57.00	838670567945
16.30	284015344703	73.30	858819734868
8.15	143492621991	81.45	989651386819
27.45	465614520325	62.15	884987634463

Tandem Sinus semissis horum complementorum.

28.30	477158760259	61.30	878857112661
14.15	246153293028	75.45	969230909706
36.45	598324600570	53.15	801253812691
30.45	511293086077	59.15	859406411501

45 Sicut ex Sinu grzduum 12. orti sunt Sinus triginta duo, & suorũ complemẽtorum, ita eadem praxi §. 40. & 42. nascentur 16. Sinus cum suis cõplementis, è Sinu graduum 36. deinde 8. è Sinu graduũ 30. & deinceps 4. è Sinu gr. 45. qui omnes 60. summam efficiunt, cum complemẽtis autem summam 120. distantes inter se minutis 45. & in Tabulam referentur hoc ordine.

Grad.	*Sinus* 1.	*Sinus* 2.	*Compl.*
0. 45	130895955711	999914327574	89. 15
1. 30	26176948307	999657324975	88. 30
2. 15	392598157759	999229036240	87. 45
3. 0	523359562421	998629534754	87. 0
3. 45	654031292301	997858933238	86. 15
4. 30	784590957271	996917333723	85. 30
5. 15	915016186631	995804927574	84. 45

Hac ratione continuabitur vsque ad gradus 45. descendendo, ascendendo verò per illorum complementa vsque ad *gr.* 39. 15. *min.*

Invenire Sinus vnius minuti.

46 Quoniam minimus Sinus repertus fuit minutorum 45. inquirendo Sinus semissium procedatur vsque ad Arcum vno minuto minorem, quod continget in sexta semisse hac arte.

Min.		*Sinus* 1.	*Sinus* 2.
45.	A.	013089595571	999914327574
$\frac{45}{2}$	B.	006544937697	999978581664
$\frac{45}{4}$	C.	003272486506	999994645402
$\frac{45}{8}$	D.	001636245443	999998661346
$\frac{45}{16}$	E.	000818122995	999999665335
$\frac{45}{32}$	F.	000409061532	999999916331
$\frac{45}{64}$	G.	000204530770	999999979082
1. *m.*	H.	000290888203	999999957692

47 Ergo quia perventum est eò vsque vbi Arcus, & Sinus insenũbiliter proportionales sunt, nam vt Arcus F. $\frac{45}{32}$ duplus est Arcus G. $\frac{45}{64}$ illius quoque Sinus duplus est huius, reperietur per regulam auream Sinus 1. *min.* scilicèt, vt numeratur 45. ad denominatorem 64. ita Sinus Arcus G. ad Sinum Arcus H. qui Sinus est 1. *minut.* ergo ducto 000204530770. in 64. diviso autem producto per 45. prodit Sinus 1. *min.* qui est 000290888203. atque eius Sinus 2. per §. 39. est 999999957692.

Ratio promovendi Tabulam.

48 Cognitis Sinibus 1. & 2. vnius minuti invenientur Sinus Arcuum duplorum per §. 40. hac arte.

Si-

Sinus 1. min.	290888203
Semiradius.	500000000000
Productus.	145444101500000000000
Sinus Radix quadrata est Sinus Versus 2. min.	169232
Ergo Sinus 2. per §. 11.	999999830868
Et Sinus 1. per §. 39.	581776385

Continuato hoc modo reperientur Sinus 4. 8. 16. 32. *minutorum*: ergo Sinus *gr.* 1. 4. *min.* igitur Sinus *gr.* 2. 8. *min.* &c. ergo Sinus semissis suorum complementorum, vti in §. 40. &c.

Modus perficiendi Tabulam.

49 Inventis Sinibus *min.* 2. & 4. reperientur Sinus *min.* 3. ita: duplato Sinu 1. *min.* habebimus chordam 2. *min.* eritque 581776406. quæ etiam est chorda differentiæ duorum Arcuum 2. & 4. *min.* differentia Sinuum secundorum in minutis 2. & 4. est 507696. ergo proportionales sunt per §. 28.

Chorda 2. min.	581776406
Ad differentiam Sinuum secundorum.	507696
Vt Radius.	100000000000
Ad Sinum min. 3.	87266451 5

Multiplicato 2. in 3. diviso autem producto per 1. exit quartus, qui Sinus est 3. *min.* Arcus, scilicet, medij inter 2. & 4. *min.*

Rursus chorda ad differentiam Sinuum primorum, vt Radius ad Sinum 2. 3. *min.*

50 Determinato Sinu 3. *min.* reperientur Sinus Arcuum duplorum 6. 12. 24. 48. 1. *gr.* 36. &c. vti in §. 48. ergo etiam Sinus semissis suorum complementorum, &c. vti in §. 40. Notis Sinibus *min.* 4. & 6. invenientur Sinus *minut.* 5. qui Arcus intermedius est: ergo Arcus dupli 10. 20. 40. *minut.* &c. Agnitis Sinibus *minut.* 8. & 10. reperientur Sinus *minut.* 9. & illorum dupli 18. 36. &c. Ita procedendum est ad invenendos omnes Sinus minutorum imparium, & suorum duplorum, &c.

donec *minut.* 45. ad impleantur, quorumduplis, & complemẽtorum semissibus consumabuntur, & perficientur Tabulæ. Io Sinibus minutorum imparium, non levis compendij est divisorem perpetuò esse chordam *minut.* 2. vti in §. 49.

Exactior ratio ad Tabulas perficiendas.

51 Qui perfectissimas Tabulas conficere velit, assumat pro Radio vnitatem cum 20. cyphris, & repertis Sinibus, vt antea vsque ad Sinum *minut.* 45. ad inveniendum Sinum 1. *min.* continuabit bipartitionem prout io §. 46. duabus operationibus superadditis: hoc est, $\frac{45}{2}\ \frac{45}{4}\ \frac{45}{8}\ \frac{45}{16}\ \frac{45}{32}\ \frac{45}{64}\ \frac{45}{128}\ \frac{45}{256}$ qui sunt ferè secunda 11. iamque evadet insensibilior differentia inter Arcus, & Sinus: quare reperietur Sinus secundorum 10. per regulam aream, vt $\frac{45}{256}$ ad Sinum suum, ita $\frac{10}{60}$ ad Sinum suum. Cognito Sinu $\frac{10}{60}$ qui sunt *sec.* 10. inveniantur Sinus Arcuum duplorum nempè *sec.* 20. & 40. deinde Sinus Arcus intermedij per §. 49. qui sunt *sec.* 30. Deinde Sinus Arcuum duplorum, *min.* 1. 2. 4. 8. &c. & absolvetur Tabula, vt in præcedentibus. Denique rejcientur ab vniversis Sinibus inventis quinque litteræ ad dextram, & remanebunt Sinus ad Radium 1. cum 15. cyphris, vel abiectis 8. litteris, supererit Radius 1. cum 12. cyphris. Qui autem laboris 10 patiens non fuerit ad decades secundorum, poterit Canonem perficere.

Methodus ad investigandas Tangentes.

52 Quia proportionales sunt, Sinus 2. ad Sinum 1. vt Radius ad Tangentem, si multiplicetur Sinus 1. in Radium, & productus dividatur per Sinum 2. erit quotiens Tangens 1. per §. 22. è contra, si Sinus 2. ducatur in Radium, & productus dividatur per Sinum 1. prodit Tangens

geos 2. eiosdem Arcus. Rursus quia Radius media proportione est ad Tangentem 1. & 2. si Quadratum Radij dividatur per Tangentem 1. exibit Tangens 2. per §. 20.

Ratio inquirendi Secantes.

53 Cum Radius medius proportionalis sit inter Sinum 2. & Secantem 1. per §. 21. si dividatur Quadratum Radij per Sinum 2. fiet quotiens Secans 1. & insuper cum Radius medius proportionalis, sit inter Sinum 1. & Secantem 2. si Quadratum Radij dividatur per Sinum 1. prodibit Secans 2.

54 Pari artificio reperientur vniversæ Tangentes, & Secantes graduum omnium, & minutorum Quadrantis, & confecta erit Tabula, Sinuum, Tangentium, & Secantium. Verùm quia operationes Logarithmorum sunt longè faciliores; exponemus modo artem, quâ Sinus, Tangentes, & Secantes transferantur in Logarithmos.

CAPVT QVINTVM.

DE NATVRA, ET PROPRIETATIBVS Logarithmorum.

55 *Logarithmi* sunt quidam numeri artificiales, qui in Progressione Arithmetica veris numeris Geometricæ progressionis respondent. Prima eorum adinventio, & Trigonometrico Canoni applicatio Ioanni Nepero Scoto, Baroni de Merchiston debetur; tam etsi Logarithmorum species ab isto Authore edita commodior non fuerit, ipsius tamen speculationi debemus illam, qua hodie vtimur, sero enim cognitis Logarithmorum suorum incommodis, cum salus iam senectute fracta ad alios novos calculandos non sufficeret; præbuit formam, quam deinceps Henricus Briggius, y Adrianus Vlac, eius consilio executioni man-

 da-

darunt, eſtque illamet, quæ hodie ſervatur. Vniverſalium rum fabrica, & vſus à ſequentibus progreſſionum proprietatibus pendet.

56 *In quotcumque Progreſſione Arithmetica (cuius nempè termini proceduni ſemper cum æquali exceſſu) ſumma extremorum æquatur ſummæ duorum quorumlibet terminorum ab extremis æqualiter diſtantium, necnon duplo medy termini.*

Sint pro exemplis Progreſſiones ſequentes.

Termin.	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*m.*	*n.*
Progreſſio. I.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Progreſſio. II.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.	26.	29.
Progreſſio. III.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Progreſſio. IV.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

57 In qualibet appoſitarum quatuor Progreſſionũ termini primus, & nonus, qui & vltimus eſt, æquantur tertio, & ſeptimo, ſiquidem in Progreſſione I. terminus *a.* eſt 4. vltimus verò 20. ſumma eſt 24. Tertius eſt 8. Septimus autem 16. at 8. & 16. efficiunt quoque 24. In Progreſſione II. *a.* & *n.* 5. 29. ſunt 34. item *c.* & *g.* ex 11. quoque & 23. fiunt 34. &c. At in omnibus Progreſſionibus, ſi terminus medius dupletur, qui eſt *e.* eius duplum æquabitur ſummæ duorum extremorum, ſicuti in Progreſſione I. 12. & 12. faciunt 24. ac etiam 4. & 20. In II. bis 17. faciunt 34. vt 5. & 39. & ſic de cæteris.

58 Huius ratio eſt, quia cum exceſſus ſit ſemper æqualis; quò terminus *a.* minor eſt *c.* eò vltimus maior eſt *g.* ergo *a.* & vltimus æquantur *c.* & *g.* Rurſus quò *a.* eſt minor *e.* medio, eò vltimus maior eſt ipſo medio: ergo *a.* & vltimus æquantur duplo medio.

59 Hinc perſpicuum fit *b.* & *b.* æquari *e.* & *g.* cum enim æquales ſint *a.* & vltimo; æquales quoque inter ſe erunt (3. P.) item infertur in quacumque Progreſſione Arithmetica, ſi ex ſumma quorumlibet duorum terminorum

norum dematur alter; reſiduum eſſe terminum alium, qui tantum diſtet à maiori, quantum minor à primo: velati ſi ex ſumma tertij, & ſeptimi auferatur *a.* exit *n.* qui tantum à *g.* diſtat, quantum *e.* ab *a.* cum enim æquidiſtantium ſummæ ſint æquales, neceſſarium eſt dempto vno relinqui alium.

60 *In quacumque Progreſſione Geometrica, Productus ex primo, & vltimo æquatur Producto duorum terminorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel producto, quiſit ex medio in ſe ipſum multiplicato.*

Num. term.	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*	*m.*	*n.*
Progreſſio I.	3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.	384.	768
Progreſſio II.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256
Progreſſio III.	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561

Velati in Progreſſione I. ſi *c.* & *g.* qui ſunt 12. & 192. multiplicantur, fit Productus a 304. ac idem producitur ex *a.* & *n.* qui ſunt 3. & 768. Rurſuſque idem ſi *e.* qui eſt terminus medius, in ſe ipſum ducatur 48. in 48. producitur a 304. idem eſt ſi multiplicentur *d.* & *f.* &c. Horum demonſtratio brevis eſt, quia ratio *a.* ad *c.* eſt duplicata rationis *a.* ad *b.* & etiam ratio *g.* ad *n.* erit quoque duplicata eiuſdem rationis: ergo *a.* eſt ad *c.* vt *g.* ad *n.* (1. l. 5.) quare rectangulum ſub *a.* & *n.* æquatur rectangulo ex *c.* in *g.* (1. l. 6.) Rurſus ratio *a.* ad *e.* ex iiſdem rationibus componitur quibus ratio *c.* ad *n.* ergo ſunt proportionales *a.* ad *c.* vt *c.* ad *n.* quare rectangulum ſub *a.* & *n.* æquatur Quadrato *c.* & eodem modo in omnibus æquidiſtantibus ab extremis, &c.

61 Vnde colligitur Productum quorũlibet duorum terminorũ ab extremis æqualiter diſtantium, æquari Producto quorumcumq; aliorum duorum terminorũ ab iiſdẽ extremis æqualiter diſtantiũ: vterlibet æquatur Producto extremorum (§. 59.) ergo inter ſe ſunt æquales (3. P.) idem infertur ſi Productus quorumlibet duorũ terminorum dividatur per quemlibet alium terminum; Quotiens

 erit

erit novus terminus, qui à maiori tantum distabit, quantum divisor à minori. Nam cum Producti æquidistantium sint æquales, si Productus dividatur per vnum terminorum, necessariò erit Quotiens alius terminus æquidistans: quare altero Producto per terminum 1. diviso, fit Quotiens terminus vltimus, qui à maiori multiplicato tantùm distat, quantùm minor a primo.

62. *Si dua Progressiones una Arithmetica, altera verò Geometrica, sibi ipsis respondeant summa, & subtractio terminorum Arithmeticorum æquipollet semper multiplicationi, & divisioni Geometricorum, termini autem Arithmetici erunt Geometricorum Logarithmi.*

Exemplum sit in sequentibus Progressionibus.

Ter min.	Progress. Geometrica. I.	II.	III.	IV.		Progress. Arithmetica. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
a.	3	2	4	1	a.	5	9	1	0	8	† 4
b.	6	6	8	2	b.	7	10	2	1	7	† 3
c.	12	18	16	4	c.	9	11	3	2	6	† 2
d.	24	54	32	8	d.	11	12	4	3	5	† 1
e.	48	162	64	16	e.	13	13	5	4	4	0
f.	96	486	128	32	f.	15	14	6	5	3	- 1
g.	192	1458	256	64	g.	17	15	7	6	2	- 2
m.	384	4374	512	128	m	19	16	8	7	1	- 3
n.	768	13122	1024	256	n.	21	17	9	8	0	- 4

63 In Progressione I. Geometrica si termini *d.* & *f.* multiplicẽtur, scilicèt, 24. per 96. & Productus 2304. dividatur per *b.* qui est 6. fiet Quotiens 384. qui octavus terminus est. Assumpta mox Progressione Arithmetica I. si *d.* & *f.* in vnam summam redigantur, videlicèt 11. & 15. fient 26. ablato *b.* qui est 7. remanebunt 19. qui est *m.* Eadem est ratio, de quacumque Progressione Geometrica, si enim Productus quorumlibet duorum terminorum dividatur per alium; Quotiens tantùm à maiori distabit, quã-

tùm

tum diuisor à minori per §. 60. in Arithmetica autem si ex duorum terminorum summa auferatur alius; residuum tantùm à maiori distabit, quantùm subtractus à minori per §. 59. ergo semper ex summa, & subtractione terminorum Arithmeticorum exibit alius terminus, qui prodeunti ex multiplicatione, & diuisione Geometricorum respondeat.

De infinitis Logarithmorum speciebus.

64 Terminos Progressionis Arithmeticæ, quæ Geometricæ correspõdet terminorũ Geometricorum. *Logarithmos appellamus*, scilicèt, à voce Græca, *Logos*, Latinè *Ratio*, & *Arithmos*, Latinè *numerus*. quare *Logarithmi* sunt numeri rationales, & relati, qui Progressionis Geometricæ veris, & absolutis terminis respondẽt. Cum autem eidẽ I. Progressioni Geometricæ apponi possint, non tantum sex Arithmeticæ, sed etiã aliæ infinitæ, quæ diverso excessu possunt effingi, propterea à Logarithmorũ species infinitæ sunt pro vna, eademque Progressione Geometrica, & vice versa, quia I. Progressioni Arithmeticæ, non solùm respondẽt quaruot Geometricæ, sed etiam infinitæ aliæ, quę adstrui possunt duplæ, triplæ, quadruplę, &c. In quacumque specie rationis, ideò ijdem *Logarithmi* diversis numeris absolutis infinitè correspondere valent.

De Logarithmis Directis, & Retrogradis.

65 Logarithmi Directi sunt, qui terminorum Geometricorum ordinem servant, etsi crescunt autem *Logarithmi*, quandò numeri quibus respondent, augentur: ex hac specie sunt I. II. III. & IV. Progressio Arithmetica. Retrogradi verò sunt ij, qui contra terminorum Geometricorum ordinem procedunt, & vbi augentur isti, illi decrescunt, & è contra. Ex hac specie sunt V. & VI. Progressio Arithmetica, quia autem vbi ad vnitatem per-

venitur, nullus iam extat numerus minor, qui verus sit; promoventur Logarithmi cum cyphra, & numeris figuratis, vel fictis, qui nihilo minores sunt, & hac hincola denotantur − quæ significat *minus*, veluti ista + *plus*: atque adeò Logarithmi cyphra inferiores sunt *dammati*, *defectivi*, & *negativi*.

Incommoda Logarithmorum refluentium.

66 Et si summa, & subtractio in Logarithmis retrogradis æq ipolleat multiplicationi, & divisioni terminorũ Geometricorum, quãdo tamen Logarithmi signa habent contria + & − necessarium est additionis, & subtractionis operationes contrarias esse, vti admonui in lib. 3. cap. 3. nostræ Arithmeticæ, quod quidem magnum incommodum affert, maximè ijs, qui in Algebraicis operationibus parum versati sunt. Exempli gratia, si in Progressione I. Geometrica multiplicentur *b.* & *f.* hoc est 6. per 96. procreabitur 576. quibus divisis per *a.* qui est 3. signetur *g.* qui est 192. Assumpta igitur Progressione VI. Arithmetica, si addantur *b.* & *f.* hoc est + 3. & − 1. additionis vice subducetur 1. ex 3. & supererit + 2. quæ summa erit ex + 3. − 1. Si ex hac summa + 2. auferatur *a.* terminus, qui est + 4. quia 4. demi nequit ex 2. contrario modo subtrahetur 2. ex 4. & remanebunt 2. cum signo contrario ita − 2. qui est *g.* & respondet num 192. Progressionis Geometricæ I.

Nemò inficiari potest has operationes molestas esse ijs præsertim, qui recens ad illas accedunt; quin etiam æquivocationi ob noxiæ sunt, & dubitationi vtrum addi, vel subtrahi, vel statui cum signo + vel − debeant. In extractione radicum (quæ mirabile Logarithmorũ compendium est) eadem incommoda æque occurrunt. Neperus post exantlatas Logarithmorum retrogradorum Tabulas hæc incommoda agnovit, & largitus est formam Logarithmorum directe procedentium, quos deinceps ef-

efformarunt Briggius, & Vlac, qui retrogradis præferendi sunt.

CAPVT SEXTVM.

ELECTIO LOGARITHMORVM *Directorum.*

67 TAmetsi Logarithmi Directi anteponendi sunt retrogradis, cum illorum species innumeræ esse possint propter Progressionum infinitatem; electionis nova materia supereſt. Ex omnibus Progressionum speciebus, optimæ sunt Geometricæ, quæ ab vnitate incipiunt, & Arithmeticæ, quæ à cyphra, vel cero: vt sunt IV. Geometrica, & IV. Arithmetica, §. 62. Nam cum in operationibus terminorum Geometricorum sæpius multiplicandum, vel dividendum sit per terminum primum, si hic sit vnitas, neque multiplicando augebit, neque dividendo minuet numerum. In terminis Arithmeticis cyphra non adauget summam, neque subtractionem imminuit.

Electio Progressionum Geometricæ, & Arithmeticæ.

68 Selectis iam speciebus, deest individuorum electio, Progressiones enim Geometricæ, quæ ab vnitate incipiunt infinitæ esse possunt, *dupla, tripla, quadrupla, &c.* Arithmeticæ verò, quæ à cyphra ordiuntur infinitæ quoque esse possunt, cum varijs intervallis 0. 1. 2. 3. 4. &c. Dico ergo Progressiones Logarithmis commodiores esse simpliciores, clariores, faciliores, & intelligentiæ magis obviæ, ex Geometricis decupla, cuius vniversi termini ex vnitate plus vnica cyphra, constant, quę singulis terminis additur, veluti 1. 10. 100. 1000. &c. Ex Arithmeticis verò illa optima est, cuius excessus est vnitas cum cyphris quotcumque, quas tamen non expedit minus esse, quam octo, vt hic apparet.

69 Progr. Geometrica. Numeri.	Termini.	Progr. Arithmetica Logarithmi.
1	a.	0.00000000
10	b.	1.00000000
100	c.	2.00000000
1000	d.	3.00000000
10000	e.	4.00000000
100000	f.	5.00000000
1000000	g.	6.00000000
10000000	m.	7.00000000
100000000	n.	8.00000000
1000000000	p.	9.00000000
10000000000	q.	10.00000000

70 Primæ Logarithmorum litteræ ad ſiniſtram, quæ punctis diſtinguntur, ſuot eæ, quæ naturalem Progreſſionem conſtituunt cum exceſſu vnitatis; has litteras vocamus *Characteriſticas*, ſunt enim veluti ſignum, aut character, quo deſignantur litteræ, quibus conſtat numerus Progreſſionis Geometricæ, cui ipſa reſpondet. Omnes enim numeri digiti, qui cadunt inter 1. & 10. Logarithmum ſuũ habet inter cyphram, & 1.00000000. atque adeò Characteriſticam habet cyphram 0. omnes numeri, qui duab⁹ litteris conſtãt, ac ſunt inter 10. & 100. Logarithmos ſuos habẽt inter 1.00000000. & 2.00000000. quorum prima littera, vel Characteriſtica eſt vnitas 1. Quiverſi numeri ex tribus litteris compoſiti, & inter 100. & 1000. cadentes; Logarithmos ſuos habeot inter 2.00000000. & 3. 00000000. quorum Characteriſtica eſt 2. ita vt Characteriſtica ſemper vnitate minor ſit litteris numeri, cui Logarithmus correſpondet: quare ſi Characteriſtica ſit 4. liquet iam numerum ex 5. litteris compoſitum eſſe, & è converſo ſi numerus quinque litteris, vel Characteribus conſtet, erit Characteriſtica 4. & ſic de reliquis.

Sum-

Summa æquivalet multiplicationi.

71. Vniverſis Logarithmorum ſpeciebus competit ſummam, & ſubtractionem terminorum Arithmeticorum æquipollere multiplicationi, & diviſioni Geometricorum per §. 62. Verùm ſola ſumma multiplicationi, & ſubtractio diviſioni non æquivalet, niſi Progreſſio Geometrica incipiat ab vnitate, Arithmetica verò à cyphra: ſi enim ex ſumma Logarithmorum duorum ſubducatur primus. Multiplicatio autem numerorum correſpondentium dividatur per primum, procreabuntur termini correſpondentes (§. 62.) cum enim ſubſtrahere cyphram, & dividere per vnitatem, neque ſummam, neque multiplicationem imminuat, ſequitur ſolam ſummam in noſtris Logarithmis æquipollere ſemper multiplicationi. Id verò licèt termini ſint trez, vel quatuor, &c. Velut ſi *b.* *c.* & *f.* addãtur; conflabitur Logarithmus 8.0000000. qui eſt *n.* at ſi *b.* & *c.* Geometricorum multiplicentur 10. per 100. prodibit 1000. hoc per *f.* multiplicato, qui eſt 100000. producetur 100000000. qui eſt *n.* & Logarithmo 8.0000000. reſpondet.

Subtractio ſola æquivalet diviſioni.

72. Provenit id ex §. 71. Nam cum ex ſumma *c.* & *d.* oriatur *f.* Logarithmus; ſi à *f.* auferatur *d.* neceſſe eſt reddi *c.* Pari ratione ſi in Progreſſione Geometrica multiplicentur *c.* & *d.* gignetur *f.* ergo vice verſa ſi *f.* dividatur per *d.* orietur *c.* & ſubtractio Logarithmorum diviſioni collateralium numerorum correſpondebit ſemper.

De quadrata Radice, & media proportionali.

73 *Si Logarithmus dupletur, vel ducatur in 2. producetur Logarithmus numeri quadrati; si autem Logarithmus dividatur per 2. erit Quotiens Logarithmus Radicis.*

Quia ſumma æquivalet multiplicationi (§. 71.) ergo ſi multiplicato numero *e.* per ſemetipſum 100. per 100. exit *e.* qui eſt 10000. quadratus ex 100. ſi Logarithmus *e.* aſſumatur bis, quod idem eſt ac multiplicare illum per 2. prodibit Logarithmus *e.* qui eſt 4. 00000000. Logarithmus quadrati ex 100. è contra ſi Logarithmus 4. 00000000. dividatur per 2. iterum reſtituetur Logarithmus 2. 00000000. qui Logarithmus eſt numeri 100. radix quadrati 10000. Ergo quia ducto *e.* in *e.* & extracta radice Producti, radix illa eſt medium proportionale, ſi Logarithmi *e.* & *e.* addantur; ſemiſsis ſummæ erit Logarithmus medij proportionalis.

De reliquis poteſtatibus ipſarumque radicibus.

74 Ducto numero in ſeipſum exit Quadratus: ducto autem Quadrato in ipſummet numerum prodit Cubus. multiplicato item Cubo per eundem numerum; gignitur Quadrato Quadratus, & ſic in infinitum, vti dixi in Arithmetica, *lib. 2. cap. 1.* ergo quia ſumma æquipollet multiplicationi (§. 71.) ſi Logarithmus addatur bis; conflabitur Logarithmus Quadrati: ſi verò addatur ter, fiet Logarithmus Cubi: denique ſi addatur quater, habebitur Logarithmus Quadrati Quadrati, & ſic in infinitum. Ergo etiam vicè verſa ſi Logarithmus Quadrati dividatur per 2. erit Quotiens R^2 vel radix Quadrata, ſi autem Logarithmus dividatur per 3. redderur Logarithmus R^3 vel radicis Cubicæ: & ſi Logarithmus Quadra-

to

to Quadrati dividatur per 4. reddetur Logarithmus radicis Quadrato Quadratæ, vel R4 & sic in infinitum.

CAPVT SEPTIMVM.

DE ARTE INVENIENDI LOGARITHMOS intermedios.

75 DVos tantum Logarithmos in binos numeros pro libitu assignare potest Arithmeticus, reliqui omnes determinati iam sunt ex natura sua, & arte sunt indagandi. In nostra fabrica numeris 1. & 10. determinamus Logarithmos 0. 00000000. & 1. 00000000. pro motus deinceps numeris in eadem ratione 1. 10. 100. 1000. &c. continuabuntur Logarithmi cum eodem excessu, vti in §. 69. sed cum inter 1. & 10. numeri intermedij 8. deficiant, ac inter 10. & 100. deficiant 89. & inter 100. & 1000. 899. &c. Adinventio Logarithmorum illis respondentium speciatim ingerit difficultatem, quæ in hoc capite exantlanda venit, cuius intelligentia vnicè pendet a §. 71. 72. 73. & 74.

76 Sicuti in Sinuum fabrica monitum est ad reperiendos Sinus exactos, opus esse quatuor, vel sex cyphras addere Radio ob iacturam, quæ in Radicum irrationalium extractione fit; ita prorsus in Logarithmis, si ij novem litteras habere oporteat, latus erit inchoare operationes cum 15. vel 20. & post absolutam fabricam abijcere ad dextram sex vltimas litteras, vel plures iuxta eas, quæ additæ fuerint. Fabrica horum Logarithmorum consistit in medijs proportionalium adinventione per Radicem quadratam, velut in Arithmetica lib. 2. §. 51. dictum fuit.

De Logarithmo numeri 2.

77 Quoniam numerus 2. inter 1. & 10. intercidit; addemus singulis 20. cyphras, quò operatio fiat exactior, atque inter hos duos numeros inquiremus medium proportionale, eiusque Logarithmum (§. 73.) qui est numerus tertius C. sequentis Tabulæ. Quia autem 2. cadit inter A. & C. inter hos duos reperietur aliud medium proportionale; qui est D. cum suo Logarithmo per §. 73. mox inter C. & D. invenietur aliud medium cum suo Logarithmo, qui est E. & hac arte inter proximè majorem quam 2. & proximè minorem, continuabitur mediorum proportionalium adinventio donec post operationes 32. extat L. qui est 1.9999999999. ita proximus ipsi 2. vt insensibiliter ab eo differat, cuius Logarithmus, qui est 0.3010299578. haberi potest sine errore pro Logarithmo numeri 2. operationem videre licèt in Tabula sequenti: Columna 1. continet numerorum ordinem A B C. &c. exigui characteres numeros denotant, inter quos assumptum est medium proportionale; veluti C. ab. significat tertium numerum, C. medium esse proportionalem inter A. & B. Similiter Q. lm. denotat O. medium esse inter L. & N. & sic de reliquis.

	Numeri.	*Logarithmi.*
A.	1.0000000000000000	0.0000000000000
B	10.000000000000000	1.0000000000000
C. *ab.*	3.162277660168 3793	0.5000000000000
D *ac.*	1.7782794100389128	0.2500000000000
E. *cd.*	2.3713737056616552	0.3750000000000
F. *de*	2.0535250264571460	0.3125000000000
G. *df.*	1.9106597497497044 05	0.2812500000000
H *fg.*	1.9809567785503387	0.2968750000000
I. *fh*	2 0169145547303304	0.3046875000000
L. *hl.*	1.9988548118735103	0.3007812500000
M. *il.*	2.0078643786024093	0.3027343750000
N. *im*	2.0033545311449098	0.3017578125000
O *lm.*	2.0012034067402922	0.3012695312500
P. *ln.*	1.9992978793 29233957	0.3010253906250
Q *np.*	2.0005410209905099	0.3011474609375
R. *pq.*	2.0002598873877707	0.3010864257812
S *pr.*	2.0001193354020097	0.3010559082031
T. *ps.*	2.0000490631127277	0.3010406494141
V. *pt.*	2.0000139278939484	0.3010330200195
X *pm.*	1.9999963605160194	0.3010192053223
Y. *mx.*	2.0000051441856956	0.3010311211267
Z. *xy.*	2.0000007523460354	0.3010301588996
A *xz*	1.9999908554179803	0.3010259682159
B *za.*	1.9999996532626259	0.3010299205780
C. *zb*	2.0000000708042552	0.3010300397877
D. *bc.*	1.9999999228034216	0.3010299801820
E *cd.*	2.0000000654188337	0.3010300099847
F *de.*	1.9999999967 261265	0.3010299950833
G *ef.*	2.0000000310724798	0.3010300025334
H *fg.*	2.0000000112899031	0.3010299988091
I. *fh.*	2.0000000053127148	0.3010299996946
L. *fi.*	2.0000000010194206	0.3010299996015
M *il.*	1 9999999988720715	0.3010299995549
N *im.*	1.9999999999460971	0.3010299995782

79 In præmissa Tabula, numeri A. & B. columnæ secundæ sunt 1. & 10. quibus singulis additæ sunt cyphræ sexdecim, reliqui sunt medij successivè extracti, multiplicatis, scilicèt, duobus, inter quos quæritur medium, & erutâ radice Producti. Duo numeri primi columnæ tertiæ Logarithmi sunt ex 1. & 10. reliqui sunt Logarithmi mediorum, additis nimirùm duobus Logarithmis, inter quos medium quæritur, & assumpta semisse summæ per §. 73.

80 Pari artificio reperietur Logarithmus 3. quia autem 3. cadit inter 1. & 10. Locabuntur 1) primùm in Tabula additis cyphris, &c. Reperienturque semper medij proportionales inter proximè maiorem, & proximè minorem ipso 3. donec exeat numerus 3. cum cyphris decem, vel numerus 2. cum decem litteris 9. cuius Logarithmus sumi poterit pro Logarithmo numeri 3. absque errore sensibili. Idem dices de numero 7. cum hæc omnia speciali difficultate careant novam formulam exponere supervacuum esse duxi.

Regula alia in Logarithmum numeri 3.

81 Ducatur 3. in se ipsum toties quoties opus sit, vt exeat numerus, qui duabus primis litteris conveniat cum aliquo ex medijs in formula §. 78. reperris, & post multiplicationes 8. invenio 19683. in Tabula autem præmissa observo G. esse proximè ipso minorem: H. verò proximè maiorem. Sumo hos duos numeros cum suis Logarithmis, eruntque A. & B. formulæ sequentis. Continuetur deinde mediorum proportionalium adinventio, suorumque Logarithmorum inter proximè maiorem, & minorem quam 19683. donec prodeat iste numerus cum cyphris quinque, & vbi perveneris ad operationes 24. inventas D. *ac.* qui sine errore sumi potest pro 19683. Itemque ejus Logarithmus 0,2940612926, & immutata Characteristica cyphra in 4. quòd numerus 19683. habet quinq; lit-

litteras (§. 70.) erit verus Logarithmus 4. 2940912924. qui divitus per 9. (sumptus enim est novies numerus 3. in multiplicationibus 8.) erit 0.4771212547. qui est Logarithmus numeri 3.

82 *Formula Logarithmi numeri 3.*

	Numeri.	*Logarithmi.*
A.	19109529749704405	0.28125000000
B.	19809567785503387	0.29687500000
C. *ab.*	19456400615886356	0.28906250000
D. *bc.*	19632190067904055	0.29296875000
E. *bd.*	19720679499652940	0.29492187500
F. *de.*	19676385041348564	0.29394531250
G. *ef.*	19698519840896686	0.29443359375
H. *fg.*	19687449330325334	0.29418945312
I. *fh.*	19681916408356205	0.29406738281
L. *hl.*	19684682674943266	0.29412841796
M. *il.*	19683299493053775	0.29409790039
N. *im*	19682607938556427	0.29408264160
O. *mn*	19682953712767906	0.29409027099
P. *mo.*	19683126602151535	0.29409408569
Q. *op.*	19683040157269895	0.29409217834
R. *eq.*	19682996934971445	0.29409122467
S. *qr.*	19683018546108806	0.29409170150
T. *rf.*	19683007740537159	0.29409146308
V. *rt.*	19683002337753560	0.29409134387
X. *ru.*	19682999636362317	0.29409128427
Y. *ux.*	19683000987057892	0.29409131407
Z. *xy.*	19683000311710093	0.29409129917
A. *xz.*	19682999974036202	0.29409129172
B. *za.*	19683000142873147	0.29409129545
C. *ab.*	19683000058454675	0.29409129358
D. *ac.*	19683000016245438	0.29409129265

De Logarithmo numeri 11.

83 Si inter numeros 10. & 100. §. 69. continuetur inventio mediorum proportionalium inter proximè majorem, & minorē ipso 11. donec exeat numerus etiam 11. cum novem, vel decem cyphris, repertus erit Logarithmus numeri 11. *Aliter* si numerus 11. multiplicetur in se ipsum texies; prodibit 19487171. qui cadit inter C. & D. §. 82. Si verò sumantur illi numeri cum suis Logarithmis, erunt duo primi Tabulæ sequentis nempè A. & B.

84. *Formula Logarithmi numeri 11.*

	Numeri.	*Logarithmi.*
A.	19456400615886356	0.28906250000
B.	19632190067904055	0.29296875000
C. *ab.*	19544097700542905	0.29101562500
D. *ac.*	19500199858919038	0.29003906250
E. *ad.*	19478287926431815	0.28955078125
F. *ae.*	19489240813202296	0.28979492187
G. *af.*	19483763900265150	0.28967285156
H. *afg.*	19486502024243704	0.28973388671
I. *ah.*	19487871365609615	0.28976440429
L. *ai.*	19487186677898736	0.28974914550
M. *bl*	19486844343064292	0.28974151611
N. *bm*	19487015509727466	0.28974533081
O. *bn.*	19487101093622856	0.28974723815
P. *bo.*	19487143885713812	0.28974819183
Q. *bp.*	19487165281794528	0.28974866867
R. *bq.*	19487175979843695	0.28974890708
S. *br.*	19487170630818377	0.28974878787
T. *bs.*	19487173305330853	0.28974884747
V. *bt.*	19487171968074569	0.28974881766
X. *bu.*	19487171299446462	0.28974880278
Y. *bx.*	19487170965132417	0.28974879533
Z. *by.*	19487171132289439	0.28974879905
A. *yz.*	19487171048710927	0.28974879719
B. *ya.*	19487171006921672	0.28974879626

Pro-

85 Promota mediorum proportionalium inventione inter proximè maiorem, & minorem quam 19487171. post operationes 22. reperietur 8. 72. cuius decem primæ litteræ non differunt à numero verò. Sumpto ergo eius Logarithmo, & immutata Characteristica cyphra in 7. quia numerus 8. litteras habet, erit 7.289748796 2. Logarithmus numeri 19487171. Diuisis autem Logarithmus per 7. (sexies enim multiplicatus in se ipsum numerus 11.) quod idem est ac elicere R7 per 5.74. erit Logarithmus numeri 11. qui est 1.041392685 2.

De Logarithmis per summas, & subtractiones.

86 Inventis Logarithmis numerorum 2. 3. & 11. per facilè habentur alij plures, nam cum summa æquipolleat multiplicationi, subtractio verò diuisioni. Si numerus 2. ducatur in se ipsum gignetur 4. ergo assumpto Logarithmo numeri 2. bis conflabitur Logarithmus numeri 4. & quia bis 4. efficiunt 8. additis Logarithmis ex 4. & 2. fiet Logarithmus numeri 8. quia autem 10. diuisio per 2. fit quotiens 5. Si subducatur Logarithmus numeri 2. ex Logarithmo numeri 10. supererit Logarithmus numeri 5. &c. Quare si duo numeri multiplicati, vel diuisi alium efficient; summa, vel subtractio Logarithmorum suorum dabit alterius Logarithmum, hac arte nullo ferè negotio plurimi Logarithmi reperiri possunt.

De Logarithmis numerorum primorum.

87 Numeri primi sunt ij, quos sola unitas metiri potest, nec ab aliorum integrorum multiplicatione gignuntur, veluti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. &c. quos usque ad 10000. inveniet

ſtudioſus in ſectione 5. miſcellaneæ Franciſci Schooten. Inter 1. & 1000. ſunt numeri primi 168. Hi omnes inveſtigandi ſunt, vt Logarithmus numeri 2. vel vt Logarithmus numeri 3. & 11. ſed quò altius aſcendunt numeri, eò redduntur breviores operationes.

De Logarithmis per proportionem.

88 Quando numerus ſuperat 1000. licèt ſit numerus primus, Logarithmus eius ita invenietur. Quæritur *exempl gr.* Logarithmus numeri 1011. Logarithmus numeri 1010. eſt 3. 0043213738. Logarithmus numeri 1012. eſt 3. 0051805126. differentia eſt 8591387. eius ſemiſsis 4295694. quæ differentia proxima eſt Logarithmorum 1010. & 1011. ſed minor iuſto. Sumatur deinde Logarithmus numeri 1014. qui eſt 3. 0060379550. huius, & primi differentia eſt 17165812. & inſtituatur regula trium. Si differentia 17165812. dat differentiam 8591387. quid dabit 8591387? duc o ſecundo in tertium diviſo autem producto per primum: fit quotiens 4299938. quæ differentia proxima eſt Logarithmorum ex 1010. & 1011. ſed maior iuſto. Addimus igitur differentiam inventa minore 4295694. atque hac reperta maiore 4299938. conflatur 8595632. cius ſemiſsis eſt 4297816. eſtque differentia propinquior Logarithmorum 1010. & 1011. Ergo ſi Logarithmo numeri 1010. qui eſt 3. 0043213738. addamus vltimam differentiam inventam, quæ eſt 4297816. obveniet Logarithmus numeri 1011. abſque errore qui eſt 3. 0047511554.

89 Eadem ratione ſi ſumamus Logarithmos 1008. 1010. & 1012. inveniemus Logarithmum numeri 1009. qui numerus primus eſt: ſimiliter cum Logarithmis 1012. 1014. 1016. reperiemus Logarithmum numeri 1013. qui etiam numerus primus eſt, &c. In his operationibus nunquam error excedit vltimam literarũ, & quò numeri

erunt

erunt maiores, eò imminuetur error. Demùm abiectis ex Logarithmis omnibus vltimis litteris, vti admonitum est in §. 76. remanebunt Logarithmi absque vllo errore.

CAPVT OCTAVVM.

EXPOSITIO CANONIS TRIGONOMETRICI.

90 PRima Tabula post librum tertium Canon Trigonometricus est, quæ omnes gradus, & minuta Semicirculi continet ab 1. *min.* vsque ad *grad.* 180. cum Sinibus, & Tangentibus Logarithmicis, qui sunt Logarithmi Sinuum, & Tangentium. Vna quæque pagina in duas columnas dividitur, quarum singulæ quatuor numerorum ordines habent, primus, & quartus singulorum graduum minuta dumtaxat comprehendunt: in 2. & 3. apponuntur Sinus, & Tangentes cum suis titulis.

91 Gradus 180. distracti sunt in quatuor Semiquadrantes. Prior columna cuiusque paginæ, in parte superiori, & ad sinistrã exhibet gradus à cyphra, vsque ad 44. & in descensu occurrunt illorum *minuta* 0. 1. 2. &c. In parte autem inferiori ad dexteram habentur gradus minoribus numeris expressi à 135. vsque ad 179. & ascendendo reperiuntur eorum minuta 0. 1. 2. 3. &c. Secunda columna cuiusque paginæ in parte inferiori, & ad dexteram continet *gradus* à 45. vsque ad 89. & ascendendo exhibet illorum *minuta* 0. 1. 2. &c. In parte autem superiori sunt *gradus* à 90. vsque ad 134. minoribus etiam numeris expressi, & in descensu eorum minuta.

Inuenire complementa cuiusque Anguli.

92 Si Angulus minor sit gr. 45. veluti gr. 39. *min.* 27. & scire velimus eius complementum ad Quadrantem

quæratur 39. suprà priorem columnam, & in descensu inuenientur *min.* 27. prosequendo lineam *min.* 27. vsque ad vltimam ordinem, secundæ columnæ offendo *min.* 33. in parte verò inferiori *gr.* 50. Dico ergo *gr.* 50. *min.* 33. esse complementum ad Quadrantem *gr.* 39. *min.* 27. Si autem inquiratur complementum ad Semicirculum *gr.* 39. *m.* 27. repertis suprà priorem colũnam 39. & in descensu *min.* 27. prosequendo lineam, vsque ad 4. ordinem eiusdẽ columnæ, offendo *min.* 33. in parte verò inferiori *gr.* 140. Dico *gr.* 140. *mm.* 33. esse complementum ad Semicirculum *ge.* 39. *min.* 27.

93 Si Angulus Acutus maior sit *grad.* 45. vti *grad.* 58. *min.* 19. quærantur *grad.* 58. in parte inferiori secundæ columnæ, & ascendendo reperientur *min.* 19. prosequendo eius lineam ad sinistrã, offendo in columna prima *min.* 41. & in parte superiori *gr.* 31. Aio *gr.* 31. *min.* 41. esse complementum ad Quadrantem *gr.* 58. *mm.* 19. & prosequendo lineam eorundem *min.* 19. vsque ad ordinem 4. eiusdem columnæ invenio *minut.* 41. sursum autem *grad.* 121. Dico *gr.* 121. *min.* 41. esse complementum ad Semicirculum *gr.* 58. *min.* 19.

94 Si verò Angulus sit Obtusus, & minor 135. veluti *gr.* 121. *min.* 41. quærentur *gr.* 121. in parte superiori columnæ secundæ, in primo ordine, & in descensu occurrent *min.* 41. prosequendo eius lineam ad dextram inveniuntur *min.* 19. infrà autem *gr.* 58. Aio *gr.* 58. *min.* 19. esse complementum ad Semicirculum *gr.* 121. *min.* 41. Si verò Angulus maior sit *gr.* 135. veluti *gr.* 148. *min.* 19. fuerint *gr.* 148. in parte inferiori columnæ primæ, & ascendendo vsque ad 19. prosequendo eius lineam ad sinistram reperiuntur *min.* 41. suprà verò *gr.* 31. Dico *gr.* 31. *min.* 41. esse complementum ad Semicirculum *grad.* 148. *min.* 19. &c.

95 Itaque gradus oppositi superior, scilicèt, & inferior cuiusque paginæ maioribus characteribus designatis

sunt

sunt alter alterius complementum ad Quadrantem: quo vero oppositi superior, & inferior cuiusque columnæ diversis caracteribus expressi; sunt alter alterius complementum ad Semicirculum. Superior, & inferior duarum columnarum in medio positi, & minoribus caracteribus scripti, sunt alter alterius complementum ad tres Quadrantes. Minor è duobus superioribus, vti etiam è duobus inferioribus, cuiusque paginæ semper est id, quo maior Quadrantem excedit.

Invenire Sinus, & Tangentes Arcuum.

96 Quævis columna Sinus, & Tangentes habet, qui sunt Sinus 1. & Tangens 1. *gradus*, & *minutorum*, qui insunt in eadem columna, tàm in parte superiori, quàm in inferiori; verùm Sinus, & Tangentes vnius columnæ sunt Sinus 2. & Tangens 2. *gradum*, & *minutorum*, qui existunt in altera columna eiusdem paginæ. Ita vt in eadem pagina reperiantur Sinus 1. & 2. vnius Anguli: Sinus 1. & 2. sui complementi ad Quadrantem, vel Semicirculum. In titulo Sinuum, & Tangentium non scribitur 1. nec 2. quia ipsemet, qui primus est vnius *gradus*, est secundus *gradus* oppositi in altera columna.

97 Sit Arcus, vel Angulus *grad.* 23. *min.* 37. quæritur Sinus 1. & Tangens 1. primùm invenio gr. 23. in parte superiori, & in descensu *min.* 37. prosequendo eius lineam, respondet illi Sinus 1. 9. 6027278. sequitur Tangens 1. 9. 6407156. & prosequendo lineam vsque ad alteram columnam illius Sinus 2. est 9. 9620122. & Tangens 2. 10. 3592844. Si Arcus sit gr. 66. *min.* 23. offendo in parte inferiori secundæ columnæ gr. 66. & in ascensu *min.* 23. prosequendo eius lineam ad sinistram occurrit illicò eius Tangens prima 10. 3592844. mox Sinus primus 9. 9620122 & prosequendo lineam vsque alteram columnam invenitur Tangens 2. scilicèt 9. 6407156. deinde Sinus 2. nempè 9. 6027278.

98 Sit Angulus *grad.* 113. *min.* 37. offendo primùm gr. 113. in parte superiori secundæ columnæ, & in descensu *min.* 37. prosequendo eius lineam ad dexteram reperitur Sinus primus 9. 9620122. deinceps Tangens prima 10. 3592844. revertendo ad sinistrã, & transeundo ad primam columnam in eadem linea invenio Tangentem 2. esse 9. 6407156. ad latus autem Sinuum 2. esse 9. 6027278. Si Arcus, vel Angulus sit *gr.* 156. *min.* 23. inveniam *gr.* in parte inferiori colamnæ primę, & in ascensu reperiam *min.* 23. prosequendo eius lineam ad sinistram in Sinuum ordine, offendo eius Sinum 9. 6027278. ad latus verò Tangentem 9. 6407156. & incedendo ad secundã columnã in eadem linea invenio Sinum 2. esse 9. 9620122. item Tangentẽ 2. esse 10. 3592844. itaque in columna vbi gradus extant in eadẽ datorum minutorum linea reperiuntur Sinus 1. & Tangens 1. & pergendo ad alteram columnam invenitur in eadem linea Sinus 2. & Tangens 2.

Ad invenire Sinus, & Tangentes secundorum.

99 Quando Angulus, vel Arcus habet gradus, minuta, & secunda, veluti *grad.* 23. *min.* 37. *sec.* 25. & quæritur Sinus 1. Sumetur Sinus *grad.* 23. *min.* 37. vt antè estque 9. 6027278. Deinde qui sequitur immediatè, & est 9. 6030166. ablato minore ex maiore; relinquitur differentia = 2888. Dicamque per regulam trium si 60. *sec.* quibus constant singula minuta, dant pro differẽtia 2888. quid dabunt 25. *sec.*? Duco differentiam 2888. in 25. *sec.* data, fit Productus 72200. quo diviso per 60. prodit 1203. hæc differentia, vel quotiens additur primo Logarithmo, si is minor sit secundo, vel demitur si maior extiterit. Addita ergo differentia inventa Sinui minori 9. 6027278. erit summa Sinus *gr.* 23. *min.* 37. *secund.* 25. & est 9. 6028481.

100 Eodem pacto invenietur Sinus 1. Anguli

grad.

grad. 156. *minut.* 22. *secund.* 35. Sinus 1. *grad.* 156. *min.* 22. est 9. 6030166. subsequens est 9. 6027278. atque minor differentia est 2888. Ajo si 60. dant 2888. quid dabunt 35? Exit 1685. subducto quotiente istn ex Logarithmo primo 9. 6030166. quia minor fuit, prodit 9. 6028481. vt antè, & est Sinus 1. *grad.* 156. *min.* 22. *sec.* 35. hac in parte cautè procedendum est illi, qui hasce operationes tecèns aggreditur, si enim summam cum subtractione, aut vice versa confundat, errorem vtique in operatione committet. In Tangentibus portò eadem observanda veniunt, quæ in Sinibus. Modus autem inveniendi Secantes, & Sinus Versos tradetur sd §§. 120. & 122.

Reperire Angulum dato eius Sinu, vel Tangente.

101 In omnibus operationibus Trigonometricis invenimus Sinum, vel Tangentem, & per illum agnoscemus Angulum, vel Arcum. Sit datus Sinus primus 9. 6028481. quæratur in Tabulis eius proximè minor in prima, vel secunda columna, sed in ordine Sinuum, & offendo in columna prima eius proximè minorem 9. 6027278 & ad sinistram 37. suprà verò *grad.* 23. Dico hunc esse Sinum 1. 23. *grad.* 37. *min.* & quia ad dexteram respondent ei *minut.* 23. ferè autem *grad.* 156. est quoque Sinus 1. *gr.* 156. *min.* 23. cum ergo compertum habeam Angulum futurum esse Acutum; dicam esse *gr.* 23. *min.* 37. Si autem futurum esse Obtusum agnoverim, dicam esse *grad.* 156. *min.* 23.

102 Dato ipsomet Logarithmo 9. 6028481. tanquam Sinu 2. vnius Anguli, quæritur vt antea in ordine Sinuum, & invento in prima columna eius proximè minori, cum sciam esse Sinus 2. prosequar eius lineam vsque ad alteram columnam, & offendam *min.* 37. suprà verò *gr.* 113. & continuata linea invenio *min.* 23. & infrà *gr.* 66.

Dico ergo esse Sinum 2. gr. 66. m. 23. item gr. 113. m. 37. Si ergo mihi constet Angulum Acutum esse debere, cognoscam esse 66. 23. Si verò Obtusum fore compererim, erit 113. 37. sed ignota specie Anguli determinari nequit Arcus, vel Angulus, licèt regulariter Acuti obveniant. Idem dicendum est de Tangentibus, ita vt sumatur perpetuò Logarithmus proximè minor, & Angulus ei correspondens tanquam verus, licèt tantum proximus sit: nam in Sinu 1. & Tangente 1. Angulus Acutus minor iusto exit; Obtusus verò maior, & vice versa in Sinu 2. & Tangente 2. Acutus maior iusto prodibit: Obtusus verò minor, quantumvis differentia negligatur, cum nec ad vnum quidem minutum perveniat.

Invenire secunda Sinus, vel Tangentis.

103 Quando studiosus operationem exactiorem obtinere cupit, non acquiescit inuento gradu, & minuto proximo, sed etiam inquirit secunda scrupula, quo Angulus fiat exactior. Sit datus idem Logarithmus 9. 6028481. vti Sinus 1. vnius Anguli, reperio eius proximè minorem 9. 6027278. eiusque Angulum Acutum 23. 37. Obtusum autem 156. 23. Sinus proximè maior est 9. 6030166. differentia proximi minoris, & maioris est 2888. dematur minor 9. 6027278. à Logarithmo dato 9. 6028481. erit differentia 1203. dicamque per regulam trium. Si differentia 2888. dat differentiam 1203. quid dabunt 60. *sec.* Prodeunt *sec.* 25. ista *secunda* addantur Angulo Acuto, fietque 23. 37. 25. subducantur verò ex Obtuso, & relinquentur 156. 22. 35. idem est in Tangente 1. sed contrarium in Sinu 2. & Tangente 2. quæ omnia caute observanda sunt, æquivocatio enim facilè potest subrepere.

CAPVT NONVM.

EXPOSITIO TABVLÆ LOGARITHMICÆ.

104 POst Canonem Trigonometricum sequitur Tabula Logarithmica, quæ numerorum absolutorum Logarithmos continet ab vnitate, vsque ad 11100. quæ valde ſis Trigonometriæ operationibus sufficiunt. Qui verò illam vberiorem exoptat, apud Vlac inveniet deductam ab vnitate, vsque ad centum millia numerorum.

Invenire Logarithmum numeri Tabulæ, & numerum integrum Logarithmi dati.

105 Quæratur in Tabula numerus datus, sitq; 4044. in cuius latere ad dextram invenitur eius Logarithmus 3.6068111. è contra si detur Logarithmus 3.6068111. quæratur in Tabula inter Logarithmos, & in eius latere ad sinistram reperitur numerus 4044. Quando Logarithmus datus in Tabula non invenitur præcisè, sumatur propinquior, & numerus ad sinistram pro verò haberi poterit. Sit datus Logarithmus 3.6252988. invemo Logarithmum 4219. minorem esse, maiorem verò Logarithmum 4220. hunc numerum pro verò assumam, quia propinquior est maiori, quam minori, si propinquiorem extendere nolimus, sufficiet proxime minorem assumere.

Invenire Logarithmum cuiuslibet fractionis.

106 Si numerator fractionis maior sit denominatore, demitur Logarithmus denominatoris à Logarithmo numeratoris; residuum est Logarithmus fractionis, veluti si dentur $\frac{29}{17}$ numerator est 29. eius Logarithmus 1.4623980. denominator est 17. eius Logarith-

mus 1. 2304489. residuum est 0. 2319491. atque Logarithmus est fractionis $\frac{99}{17}$. Si verò numerator minor sit denominatore auferetur Logarithmus numeratoris à Logarithmo denominatoris, residuum cũ signo — erit Logarithmus fractionis, sed negativus, vel defectivus. Sit fractio $\frac{17}{99}$ Logarithmorũ differentia est 0. 2319491. præfixo signo — erit —0. 2319491. Logarithmus fractionis $\frac{17}{99}$.

Ad inveniri Logarithmum integri cum fracto.

107 Sit numerus $358\frac{7}{12}$. sumatur prius Logarithmus integri 358. & est 2. 5538830. mox sequens, qui est 2. 5550944. differentia utriusque est 12114. Ergo per regulam auream si denominator 12, dat 7. quid dabit differentia 12114? Hac multiplicata per 7. & Producto 84789. diviso per 12. prodit 7066. id additur Logarithmo numeri integri 2. 5538830, & fit summa 2. 5545896, Logarithmus numeri $358\frac{7}{12}$.

Cuiusvis Logarithmi, integrum, & fractum reperire.

108 Sit Logarithmus 2. 5545896. quæro eius proximè minorem, & iuxta 358. offendo 2. 5538830. & proximè maiorem 2. 5550944. differentia inter maiorem, & minorem est 12114. differentia inter minorem, & medium est 7066. denominator fractionis sit 12. vel quia datus, vel quia electus. Dico ergo per regulam trium: Si differentia minoris, & maioris 12114. dat minoris differentiam, & medij 7066. quid dabit denominator 12? Multiplicato 7066. per 12. diviso autem Producto per 12114. exit quotiens 7. & est numerator. Dico ergo hunc Logarithmum 2. 5545896. esse Logarithmum numeri $358\frac{7}{12}$. facilitatis gratia eligere oportet denominatorem 10. vel 100. vel 1000.

&c.

Invenire Logarithmum partium decimarum.

109 De partibus decimis de vtilitate quam afferunt Architectis militaribus, & Mathematicis egi in *lib.* 1. Arithmeticæ *cap.* 9. & 10. Datæ sint decimæ $\frac{79}{100}$. Logarithmus numeratoris 79. est 1.8976271. denominatoris verò 100. est 2.0000000. differentia est 0.1023729. cum signo ⊢ erit ⊢0.1023729. Logarithmus *defectivus* numeri $\frac{79}{100}$.

Reperire decimas Logarithmi negativi.

110 Sit Logarithmus defectivus ⊢ 0.1023729. subduco illum ex Logarithmo numeri 1000. qui est 3.0000000. & remanet 2.8976271. quem reperio propè 790. estque numerator numeri 1000. Dico ergo ⊢0.1023729. esse Logarithmo fractionis $\frac{790}{1000}$. hoc est $\frac{79}{100}$.

Invenire Logarithmum integrorum, & decimarum.

111 Sit numerus 3725. $\frac{25}{100}$. Logarithmus numeri 3725. est 3.5711263. proximè maior est 3.5712428. vtriusque differentia est 1165. hac multiplicata per numeratorem 25. fit Productus 29125. quo diviso per 1000. hoc est ablatis à dextera tot litteris, quot habet cyphras numerus 1000. exeunt 29. additis his Logarithmo 3.5711263. prodit Logarithmus 3.5711540. numeri 3725. $\frac{25}{100}$.

Invenire integros, & decimas cuiuslibet Logarithmi.

112 Sit Logarithmus 3.5711540. quem in Tabulis eius proximè maiorem 3.5711263. & 3725. proximè maior est 3.5712428. differentia maioris, & minoris est 1165. differentia verò minoris, & medij est 277. Ait; si 1165. dant 277. quid dabunt 1000? Addo tres cyphras numero 277. quod idem est ac multiplicare per 1000. fit Productus 277000. quo diviso per 1165. obvenunt 238. millesimæ. ergo 3725. $\frac{238}{1000}$. est numerus Logarithmi dati 3.5711540.

Invenire Logarithmum numerorum maiorum 10000.

113 Sit numerus 37251238. quatuor priores litteræ ad ſiniſtram dividantur puncto ſic 3725. 238. & ex reliquis conſtituatur fractio tot cyphris, quot habet litteras hoc modo 3725. $\frac{238}{1000}$. reperiatur eius Logarithmus per §. 111. qui eſt 3. 571 1540. Si characteriſticæ addantur 3. quia fractio tres litteras adiecit numero, erit Logarithmus 6. 571 1540. numeri integri 37251238.

Invenire numerum Logarithmi maioris quam 4.0000000.

114 Sit Logarithmus 6. 571 1540. veluti ſit characteriſtica eſſet 3. & Logarithmus 3. 571 1540. reperio eius proximè minorem propè 3725. & eſt 3. 571 1263. proximè verò maior eſt 3. 571 2424. differentia maioris, & minoris 1165. minoris autem, & medij 277. adiectis tot cyphris, quot habet litteras differentia characteriſticarum ſit 277000. hoc Producto diviſo per 1165. exit 238. & Logarithmus 3. 571 1540. eſt Logarithmus numeri 3725. $\frac{238}{1000}$. vti in §. 112. ſumpto ergo tanquam integro: ab 37251238. eſſe numerum Logarithmi dati 6. 571 1540.

Invenire complementum Logarithmicum.

115 Complementum Logarithmicum eſt differentia inter Logarithmum, & Radium 10. 0000000. ablato ergo Logarithmo ex Radio remanet complementum Logarithmicum.

Radio, & Logarithmo etiam non ſcriptis reperitur facilime complementum ſi ſumatur differentia cuiuſque litteræ uſque ad 9. in vltima verò uſque ad 10. veluti à 6. uſque ad 9. deſunt 3. à 5. uſque ad 9. deſunt 4. à 7. uſque ad 9. deficiunt 2. &c. in vltima autem à 8. uſque ad 10. deficiunt 2. Si Logarithmus maior ſit Radio vti in Tangentibus vltra gr. 45. ſumitur complementũ ad

Exemplum.

Radius.	10. 0000000.
Logarithmus.	6. 571 1458.
Complement.	3. 4288542.

ad Radium Duplum 20. 0000000. eodem pacto omissa vnitate priori ad sinistram ac sit non esset. Sit Tangens 10. 3599731. dico a cyphra vsque ad 9. desunt 9. à 3. vsque 9. desunt 6. à 5. vsque ad 9. deficiunt 4. &c. estque complementum 9. 6400269.

De Logarithmis Caramuelis.

116 Superiori anno 1670. prodijt in lucem Mathematica nova Illustrissimi Caramuelis, vbi in tom. 2. novos quosdam affert Logarithmos Retrogradoa, quos refluentes ipse vocat cum Tabula *Sinuum, Tangentium, & Secantium*, & Briggianis commodiores esse autumat, tametsi patiantur incommoda à nobis perpensa §§. 65. & 66. Is tamen cui tanti Authoris opera videre non licuit, huiusmodi Tabulas facillimo negotio construet, si Logarithmorum nostrorum complementa assumat. Hac vna animadversione Caramuel quæstionem illam paginæ 863. solvere potuit nempè: *An Briggiana Chilias nostro Caroli coaptari possit.*

CAPVT DECIMVM.

APPLICATIO LOGARITHMORVM.

117 PRæmissus labor compensatur facilitate, & vtilitate Logarithmorum, quæ sanè admirabilis est, maximè in regula proportionis, extractione Radicum, inventione mediorum proportionalium, & in resolutione, & trasformatione figurarum, & corporum regularium.

De regula proportionis.

118 Quatuor terminis proportionalibus existentibus Rectangulum ex medijs æquatur Rectangulo ab extremis (1. l. 6.) ergo si tres detur invenietur quartus, multiplicato enim secundo in tertium, habemus Rectangulum mediorum, quia autem istud Rectangulum idem est ac

Rectangulam extremorum, si dividatur per primum, qui alter extremus est, exibit quartus, qui est extremus reliquus: ergo cum in Logarithmis, summa multiplicationi, subtractio verò divisioni æquivaleat (§. 71. & 72.) si addatur Logarithmi B. & C. ex summa verò dematur Logarithmus A. relinquetur Logarithmus D. vel quarti proportionalis. Dispositio huiusmodi esse potest:

	Term. propor.	*Logarithmi.*
A. Si 12,		1.0791812
B. dant 36.		1.5563025
C. quid 25?		1.3979400
	b.+c.	2.9542425
D. dat 75.	*b.+c.=a.*	1.8750613

Logarithmo D. respondet in Tabula numerus 75. In regula inversa observanda sunt, quæ in Arithmetica nostra diximus, *lib.* 1. §. 76.

De complemento Logarithmico in proportione.

119 Si pro Logarithmo A. sumatur eius complementum, veluti in §. 115. summa trium multata Radio dabit *Logarith.* D.

	Term. propor.	*Logarithmi.*
A. Si 12.	*Cõpl.*	8,9208188
B. dant 36.		1.5563025
C. quid 25?		1.3979400
D. dant 75.	*summa*	1.8750613

Summa trium Logarithmorum est 11.8750613. dempto Radio remanet 1.8750613. dimissa, scilicèt, unitate ad sinistram. Si complementum sumatur ad duplum Radium, auferetur à summa 2. quod idem est, ac demere duplum Radium ad quem sumptũ est complementum. Ratio totius operationis est, quia cum primus Logarithmus subtrahendus esset, addidimus eius cõplementum ad Radium: undè quod subtrahere omisimus, & quod addidimus æquantur Radio: ergo summa omniũ superat Logarithmum quæsitũ toto integro Radio, quare ablato Radio remanet quartus Logarithmus D. quæsitus, hæc praxis faciliores reddit operationes, cuius usum videre licèt in universo libro 2. & 3. Idem dices de complemento ad duplum Radium: tunc ergo duplus Radius auferendus erit ex summa.

Ra-

Ratio inveniendi Secantes Logarithmicas.

120 Secantes in Canone Trigonometrico scienter omisimus cum in nostra methodo minimè requirãtur, tùm quia facilè reperientur per regulam sequentem.

Complementum Sinus 1. vnà cum Radio, qui est vnitas ad sinistram; fit Secans 2. Complementum Sinus 2. vnà cum Radio fit Secans 1. Quæritur Secans 2. *gr.* 35. *min.* 8. Sinus 1. est 9.7600311. eius complementum 0.2399689. præfixa vna vnitate, quod idem est ac addere Radium; est 10.2399689. Secans 2. Si verò quæratur Secans 1. Sinus 2. *gr.* 35. *min.* 8. est 9.9126551. eius complementum 0.0873449. vnà cum Radio fit Secans 1. 10.0873449. Sumpto complemento cuiusque litteræ vsque ad 9. Sinu etiam non scripto (§. 115.) invenitur Secans æquè velociter, ac si in Tabula, vel Canone Trigonometrico esset.

121 Huiusce rei demonstratio pendet à §. 21. Radius enim media proportione est inter Sinum 1. & Secãtem 2. vnius Arcus. Si notus sit Sinus 1. & Radius, reperietur Secans 2. per propottionem, dispositis terminis vti in §. 119.

	Termin. propor.		*Logarithmi.*
Vt	*Sinus* 1. *gr.* 35. 8. *min.*	*Compl. Log.*	0.2399689
ad	*Radium*		10.0000000
ita	*Radius*		10.0000000
ad	*Secantem* 2.	*summa*	10.2399689

Complementum Sinus nihil immutatur, cyphræ enim non adaugent summam, quia verò Radius bis repetitur in summa, & auferri debet semel (§. 119.) remanet in summa Radius, & complementum Sinus: ergo complementum Sinus 1. vna cum Radio est Secans 2. pari ratione demonstrabitur complementum Sinus 2. vnà cum Radio esse Secantem 1.

Invenire Logarithmum Sinus Versi.

122 Sit Arcus *gr.* 50. eius semissis sunt *gr.* 25. ergo quia Sinus 1. vnius Arcus medius est proportionalis inter

Semiradium, & Sinum Verſum Arcus dupli §. 19. erunt termini proportionales, & ordinabuntur vti in §. 119.

Termini proportionales.			*Logarithmi.*
Vt	*Semiradius*	5000000000. C.L.	0.3010299
ad	*Sinum* 1.	*gr.* 25.	9.6259483
ita	*Sinus* 1.	*gr.* 25.	9.6259483
ad	*Sinum Verſum*	*gr.* 50. *ſumma*	9.5529265

Hinc exoritur hæc regula practica. Logarithmus numeri 2. vnà cum Sinu duplici cuiuslibet Arcus, multatus Radio, dat Sinum Verſum Logarithmi cum Arcus dupli. Quoniam Logarithmus numeri 2. complementum eſt Logarithmi Semiradij abſoluti: prout ſequenti exemplo.

Log. num. 2.	0.3010299
Sinus gr. 25.	9.6259483
Sinus gr. 25.	9.6259483
Summa eſt Sinus Verſus 50. *gr.*	9.5529265

Invenire quamlibet Radicem cuiuſque numeri.

123 Logarithmus numeri dividatur per exponentem Radicis, & obveniet Logarithmus Radicis quæſitæ. Radix quadrata eſt R^2. eius exponens 2. Radix Cubica eſt R^3 ſequuntur R^4 R^5 &c. vti diximus in *lib.* 2. *Arithmeticæ*, §. 9. Ergo ad reperiendam R^2 quæ quadrata eſt dividetur per 2. ad R^3 dividetur per 3, & ſic deinceps. Sit numerus 625. & eius Logarithmus 2.7958800. quæritur R^2 diviſo Logarithmo per 2. exit 1.3979400. cui in Tabula Logarithmica reſpondet numerus 25. qui eſt R^2 vel Radix quadrata numeri 625. Sit Rurſus numerus 1728. eius Logarithmus 3.2375437. quæritur R^3 quæ Cubica eſt. Diviſo Logarithmo per 3. prodit 1.0791812. eius numerus 12. & eſt *Radix Cubica* numeri 1728. &c. hæc practica emanat ex §. 73. & 74.

Invenire quaſcunque medias proportionales.

124 Quando termini Geometrici proportionem aliquam continuant, Logarithmi cum æquali exceſſu pro-

ce-

cedunt §. 62. ergo si differentia duorum Logarithmorum dividatur per numerum mediorum vnitate adauctum; fiet quotiens excessus æqualis Logarithmorum. Sint dati numeri 2. & 128. eorum Logarithmi sunt 0. 3010300. & 1. 1072100. differentia est 1. 8061800. Si quæratur vnus medius proportionalis dividatur per 2. & exit 0. 9030900. qui est excessus, is verò additus Logarithmo minori 0. 3010300. prodit 1. 2041200. cui numerus correspondens est 16. & est medium proportionale inter 2. & 128. suntque continui 2. 16. 128.

125 Si quærantur duo media proportionalia: differentia 1. 8061800. dividatur per 3. & obveniet excessus 0. 6020600. is minori adiectus 0. 3010300. est primum medium 0. 9030900. cius autem numerus 8. addito rursus excessu 0. 6020600. Logarithmo prioris medij 0. 9030900 prodit Logarithmus 1. 5051500. cius verò numerus 32. ergo quatuor proportionalia sunt 2. 8. 32. 128. atque 8. & 32. sunt duo media. Si quærantur quinque media, dividetur differẽtia 1. 8061800. per 6. & est excessus 0. 3010300 adiectus Logarithmo minori 0. 3010300. procreatur 0. 6020600. cuius numerus est 4. Addito rursus excessu efficitur 0. 9030900. cuius numerus est 8. Addito iterum excessu, fit 1. 2041200. cuius numerus est 16. Adiecto adhuc excessu, prodit 1. 5051500. cuius numerus est 32. Addito rursus excessu, exit 1. 8061800. cuius numerus est 64. atque continui sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. & quinque media inter duo extrema inventa sunt, &c.

Continuare rationem aliquam in infinitum.

126 Sit ratio 3. ad 6. si Logarithmorum suorum differentia addatur continuè maiori; obvenient Logarithmi terminorum continuorum. Logarithmus numeri 3. est 0. 4771212. numeri autem 6. est 0. 7781512. differẽtia est 0. 3010300. addita maiori Logarithmo, fit 1. 0791812. cuius numerus est 12. adiecta rursus vltimo Logarithmo, prodit 1. 3802112. cuius numerus est 24. addita iterum

vltimo, exit 1. 68124 12. cuius numerus est 48. & sic in infinitum: & sunt continui 6. 12. 24 48. quia differentiæ Logarithmorum suorum sunt æquales propter proprietatem expressam §. 62. Si ratio maioris inæqualitatis sit, vt 48. ad 24. auferetur à minori continuè differentia Logarithmorum, quæ operatio contraria existit.

Regula aurea Astronomica.

127 In vsu Tabularum Astronomicarum occurrit sæpius pars proportionalis, in hunc finem constructa est Tabula sexagenaria, absque ea tamen facillimè reperitur quartus proportionalis per compendium *nostræ Arithmeticæ, lib. 1. §. 138.* Logarithmi inserviunt etiam operationibus istis eadem facilitate, quâ præcedentibus, quam obrem disposita est Tabula Logarithmica cum gradibus, minutis, & secundis necessarijs, atque ordine operationibus huic congruo.

Dispositio Tabulæ Logarithmicæ.

128 In parte superiori cuiuslibet columnæ in sunt gradus, & minuta: gradus denotatur littera G. supernè, minuta verò littera M. secunda à cyphra vsque ad 59. collocata sunt ad sinistram cuiusque paginæ, & vniversis columnis eiusdem paginæ correspondent.

Invenire Logarithmos graduum, minutorum, & secundorum, vel è contra.

129 Sint dati *gr.0.min.37. sec.15.* repetiantur primò *gr.0.min.37.* in parte superiori, & in eadem pagina ad sinistram descendendo sumantur *sec.15.* & prosequendo eius lineam vsque ad columnam, vbi sunt *gr.0.m.37.* comperio respondere illi Logarithmum 3.3492775. qui est idē Logarithmus numeri 2235. dico ergo 3.3492775. esse Logarithmum *gr.0.min.37 sec.15.* vel secundorum 2235. si datus sit Logarithmus 3.3492775. quæratur in Tabula, & in parte superiori eiusdem columnæ reperietur *gr.0.m.37* & prosequendo lineam Logarithmi ad sinistram offendētur *sec.15.* aio igitur Logarithmum esse *gr.0.m.37.sec.15.* &c.

Re-

Reperire Logarithmum horarum, & minutorum, vel è contra.

130 Sumantur horæ in parte superiori, perinde ac si essent graduum minuta, minuta verò horæ ad sinistram, tanquam si essent graduum secunda, & invenietur, vt antea Logarithmus; exempli gratia: Si quæratur Logarithmus *hor.* 19. *min.* 48. sumentur in parte superiori *gr.* 0. *min.* 19. & ad sinistram *sec.* 48. & prosequendo eius lineam è regione 0. 19. offendo 3.0748164. qui Logarithmus est *hor.* 19. *min.* 48. Si duo, vel tres dies ad sint, ad horas revocandi sunt multiplicando per 24. & horas, quibus singuli dies constat. Vice versa datur Logarithmus 3.0748164. quæratur in Tabula, & in parte superiori respondent ei 0. 19. id est *hor.* 19. ad sinistram autem reperiuntur *sec.* 48. hoc est *min.* 48. vnius horæ.

Invenire Logarithmos plurium graduum, & minutorum, vel è contra.

131 Quia Tabula 3. *gr.* non excedit, si plures sint vti in motu Lunæ, vel Cometarum; reperietur Logarithmus vt in horis; hoc est sumptis gradibus tanquam minutis, minutis vero tanquam secundis, exempli causa quæratur Logarithmus *grad.* 19. 48. *minut.* & invenietur, vt antea 3.0748164. & dato Logarithmo offendentur *gr.* 19. *minut.* 48. vti in §. 130.

Regula proportionis Astronomica.

132 Disponuntur termini, & sumitur complementum Logarithmicũ primi, vti in §. 119. summarium multata Radio dat quartum Logarithmum.

Exemplum 1.

			Logarithmi.
A.	*Si*	1. *gr.* 0. *m.*	C.L. 6.4436975.
B.	*dat*	35. *m.* 22. *sec.*	3.3267454
C.	*quid dabit*	28. *m.* 44. *sec?*	3.2365373
D.	*& exerunt*	16. *m.* 56. *sec.*	*summa* 3.9069802

Exem-

Exemplum 2. *Logarithmi.*

A.	*Si*	1.gr.15.m.39.sec.	C.L.	6.3430398
B.	*dant*	0.gr.57.m.43.sec.		3.5394525
C.	*quid dabit*	0.gr.24.m.16.sec.		3.1631614
D.	*& exeunt*	0.gr.18.m.31.sec.	*summa*	3.0456537

Exemplum 3. *Logarithmi.*

A.	*Si Sol uno die, vel 24 hor.*		C.L.	6.8416375
B.	*percurrit*	59.m.50.sec.		3.5550944
C.	*quid*	16.hor.45.m.		3.0021601
D.	*& prodeant*	41.m.46.sec.	*summa*	3.3988930

Exemplum 4. *Logarithmi.*

A.	*Si*	13.gr.45.m.	C.L.	7.0788339
B.	*dant*	24.hor.0.m.		3.1583625
C.	*quid dabit*	11.gr.20.m.		2.8325089
D.	*& exeant*	19.hor.34.m.	*summa*	3.0697053

133 *Ad reperiendam horam Aspectuum.*

Si duo Astra sint directa, vel ambo Retrograda.

Vt motuum differentia	11.gr. 0.m.	C.L.	7.1804561
ad horas diei	24.hor.0.m.		3.1583625
ita Astrorum distantia	7.gr. 0.m.		2.6232493
ad horam aspectus	15.hor.16.m.		2.9620679

Si unum sit Directum, alterum verò Retrogradum.

Exemplum 6.

Vt summa motuum	1.gr.54.m.54.sec.	C.L.	6.1615287
ad horas diei	24.hor.0.m.		3.1583625
ita Astrorum distantia	58.m.24.sec.		3.5445641
ad horam aspectus	12.hor.11.m.		2.8644553

Finis Libri primi.

LIBER SECVNDVS DE TRIGONOMETRIA PLANA.

TRigonometria Plana *est scientia, quæ Triangula Plana Rectilinea mensurat, atque resolvit. Triangulum Planum Rectilineum est illud, quod in superficie plana lineis rectis formatur. Triangulum igitur tribus Arcubus circuli, vel quibuslibet tribus lineis curvis in superficie plana descriptum, licèt Triangulum Planum dici possit; non tamen Trigonometria Plana est obiectum, eò quod Rectilineum non sit, vel tribus lineis rectis minimè concludatur.*

CAPVT PRIMVM.

SVPPOSITIONES GEOMETRIÆ Triangulorum.

1 QVodvis Triangulum Planum Rectilineũ Rectãgulũ est, vel Obliquangulum. Rectangulum est, quod vnum Angulum Rectum habet. Obliquangulum

verò, quod tres Angulos omnes habet Obliquos, nullumque rectum. Triangulorum ſpecies reperientur in Geometria noſtra, Procmiali 12.

2 Tres Anguli cuiuſque Trianguli Rectilinei æquipollent gradibus 180. hoc eſt duobus Angulis Rectis, (3. l. 1.) ergo ſumma quorumlibet duorum Angulorum minor erit perpetuò gradibus 180. Item ſi quivis Angulus dematur ex 180. reſiduum erit ſumma duorum reliquorum. Si verò duorum ſumma auferatur à 180. reſiduum erit Angulus tertius. Si denique dimidium Anguli ſubtrahatur ex gradibus 90. reſiduum erit ſemiſumma duorum reliquorum, & è contra. Ratio addendi, & ſubtrahendi gradus, & minuta, invenietur in Arithmetica noſtra *lib.* 1. *cap.* 2. & 3.

3 In Triangulo Rectangulo duo Anguli Acuti vnũ Rectum conſtituunt, qui eſt graduum 90. Si latera, quæ Angulum Rectum ambiunt, ſint æqualia, quivis Angulus oppoſitus erit ſemiſsis recti: nam lateribus æqualibus, æquales Anguli opponuntur (5. l. 1.) & quia ambo vnum Rectum efficiunt, erit vnuſquiſque Semirectus.

4 Si Triangulum ſit Iſoſceles, perpendicularis bifariam ſecat baſim, & Angulum à lateribus æqualibus comprehenſum. Si verò perpendicularis bifariam baſim, vel Angulum ſecet, erit Triãgulum Iſoſceles, & latera æqualia. Si perpendiculum ſemibaſi æquale ſit, Angulus Verticalis Rectus erit. Si autem maius fuerit ſemibaſe, erit Angulus Acutus ſi verò minus, erit Obtuſus.

5 Si Triangulum Æquilatetum ſit, erit quoque Æquiangulum; ſi autem Æquiangulum, erit etiam Æquilatetum.

6 Duo lateta cuiuſq, Trianguli maiota ſunt reliquo. Latus maius maiori Angulo opponitur. Angulus verò maior, maiori lateti: quare cognito maiori latere, maior Angulus latere non poteſt, & è contra.

7 In quocumque Triangulo ſi Angulus vnus æque-

tur

tus duobus reliquis, Angulus Rectus erit: si verò minor sit, erit Acutus, & si maior, erit Obtusus. Et viceversa si Rectus fuerit æquabitur summæ duorum reliquorum, si Acutus, duobus reliquis minor erit: si verò Obtusus, maior. Complementa ad Quadranten, vel Semicirculum invenientur, *lib. 1. §. 4.*

CAPVT SECVNDVM.

DEMONSTRATIONES TRIGONOMETRIÆ Planæ.

8. IN Triangulis Rectangulis latus, quod Angulum Rectum subtendit, *Hypothenusa* appellatur, & ab alijs dicitur *Basis*.

DEMONSTRATIO I.

In Triangulo Rectangulo Hypothenusa ita se habet ad latera, vt Radius ad Sinus Angulorum oppositorum.

Fig. 6.

Sit Triangulum ABC. ex centro B. descripto quovis circolo DR. continuentur BAD. & BCR. & ducta perpendicularis DE. Sinus erit Anguli B. (lib. 1. §. 8.) quia verò Anguli ad C. & E. Recti sunt, erunt CA. DE. parallelæ (2. l. 1.) ergo BCA. BED. Triangula Similia sunt, & latera habent proportionalia (2. l. 6.) ergo Hypothenusa BA. est ad latus AC. vt Radius BD. ad Sinum DE. qui est Sinus Anguli oppositi B. insuper si ab Angulo D. describatur circulus BG. Hypotheousa AB. erit ad latus BC. vt Radius BD. ad Sinum BE. Anguli oppositi D. qui æqualis est Angulo A. Ergo Hyporhenosa ad quodlibet latus est, vt Radius ad Sinum Anguli oppositi, & alternando Hypothenusa ad Radium, vt latus ad Sinum Anguli oppositi, etiamque invertendo Radius ad Hypothe-

theoufam, vt Sinus Anguli ad latus oppoſitum, &c. (4.l.5.)

DEMONSTRATIO II.

9 *In Triangulo Rectangulo latus Angulo adiacens ita ſe habet ad latus oppoſitum ipſi Angulo, vt Radius ad Tangentem eiuſdem Anguli.*

Item. *Latus ita ſe habet ad Hypothenuſam, vt Radius ad Secantem Anguli comprehenſi.*

Fig. 9.

Sit Triangulum ABC. à centro B. deſcribatur quilibet circulus, & cootiouatis BAD. BCE. ſit ED. perpendicularis Radio, eritque ED. Tangens Anguli B. (l.1.ſ.12.) quia autem Anguli ad C. & E. ponuntur Recti, erunt BC. ED. parallelæ (2.l.1.) Triangula verò BAC. BDE. Æquiangula, & latera habebunt proportionalia (2.l.6.) ergo latus BC. ad latus CA. eſt, vt Radius BE. ad Tangentem ED. Anguli B. oppoſiti lateri CA. Item, quia BD. eſt Secans 1. Anguli B. (l.1.ſ.14.) latus BC. erit ad Hypothenuſam BA. vt Radius BE. ad Secantem BD. Rurſus ſi circulus deſcribatur ab Angulo D. erit latus AC. ad latus CB. vt Radius DE. ad Tangentem EB. Anguli ad D. vel A. etiamque *alternando*, vel *inuertendo*, proportionales erunt. (4.l.5.)

DEMONSTRATIO III.

10 *In quouis Triangulo latera proportionalia ſunt Sinibus Angulorum oppoſitorum, & è contra.*

Fig. 10. 11.

Sit quodlibet Triangulum ABC. deſcripto circulo per tres Angulos (4 prob. noſtræ Geometriæ Practicæ) diuiſiſque bifariam Arcubus in E. F. G. Quoniam Anguli in peripheria ſemiſſes ſunt Arcuum oppoſitorum, (3.l.3.) erit EB. menſura Anguli C. & BF. menſura

An-

Anguli A. & AG. Anguli B. Sinus autem Arcus EB. Sinus erit Anguli C. Sinus verò Arcus AG. Sinus B. &c. Ergo quia chorda AB. eſt ad chordam AC. vt Sinus Arcus EB. ad Sinum Arcus AG. (l. 1. §. 17.) erit BA. ad AC. vt Sinus Anguli C. ad Sinum Anguli B. & pariter AB. ad BC. vt Sinus Anguli C. ad Sinum Anguli A. itemque *alternando, vel invertendo*, &c. (4. l. 5.)

DEMONSTRATIO IV.

II *In quocumque Triangulo ſumma laterum ad ipſorum differentiam, eſt vt Tangens ſemiſummæ Angulorum oppoſitorum ad Tangentem ſemidifferentiæ eorundem.*

Fig. 12.

Sit Triangulum A B C. continuetur B A D. itaut AD. AC. itemque DR. AB. æquales ſint, eritque DB. ſumma laterum; RA. illorum differentia, connectatur DC. & AE. ad hanc rectam perpendicularis ſecabit illam bifariam, & inſuper Angulum DAC. (5. l. 1.) & quia externus Angulus DAC. ſumma eſt Angulorum B. & C. (3. l. 1.) erit EAC. ſemiſumma: ductis RL. AH. parallelis BC. cum EA. ſit æqualis RD. erit CH. æqualis LD. (2. l. 6.) ergo LE. EH. remanebunt æquales (4. P.) & Anguli EAL. EAH. & inſuper LAD. HAC. (5. l. 1.) at LAH. differentia eſt Angulorum DAH. HAC. qui ſunt æquales Angulis B. & C. (2. l. 1.) propter parallelas AH. BC. ergo EAH. ſemidifferentia eſt Angulorum B. & C. Deſcripto igitur circulo Radio AE. erit EC. Tangens ſemiſummæ EAC. & EH. Tangens ſemidifferentiæ EAH. & cum LR. HA. CB. parallelæ exiſtant, proportionales erunt BD. ad RA. vt DC. ad LH. (2. l. 6.) itemque vt DC. ad LH. ita ſemiſsis EC. ad ſemiſſem EH. (5. l. 5.) ergo per 1. l. 5. proportionales ſunt.

Vt BD. *Summa laterum CA. & AB.*
ad RA. *Differentiam eorundem laterum.*
ita EC. *Tangens semisummæ Angulorum B. & C.*
ad EH. *Tangentem semidifferentiæ eorundem.*

CONSECTARIVM

12 Ergo cognita semisumma, & semidifferentia, si semisummæ DAE. addatur semidifferentia EAH. componetur Angulus maior DAH. æqualis B. Si verò ex semisumma EAC. dematurr semidifferentia EAH. supererit Angulus minor HAC. æqualis C. & vice versa adiecta semidifferentia EAH. parti minori HAC. exurget semisumma CAB. atque id vniuersale, & commune est omnibus quantitatibus.

DEMONSTRATIO V.

13 *In quolibet Triangulo basis, vel latus maius ita se habet ad summam laterum, vt illorum differentia ad differentiam segmentorum, quæ fiunt à perpendiculo à vertice in basim.*

Fig. 13.

Sit Triangulum ABC. basis, vel latus maius CA. perpendicularis BE. Radio BC. qui est latus minus, describatur circulus, & producatur AB. vsque ad G. ergo quia BG. BC. æquales sunt; erit ABG. summa laterum AB. BC. & quoniam perpendicularis BE. bifariam secat chordam CD. (2. l. 3.) cum æquales sint CE. ED. erit DA. differentia segmentorum CE. EA. Tùm quia æquales sunt BC. BI. erit HA. differentia laterum CB. BA. Ergo quia Secantes AG. AC. exteriosibus segmentis sunt reciprocæ (6. l. 6.) proportionales erunt.

Vt AC. *Basis, vel latus maius.*
ad GA. *Summam laterum.*
ita HA. *Differentia laterum.*
ad DA. *Differentiam segmentorum basis.*

Præ-

14 Præcedentes demonſtrationes Trigonometriæ Planæ ſufficiunt; viſum eſt tamen ſequentem adnectere, quæ Triangulo ſolvendo inſervit ex datis tribus lateribus, eadem praxi Triangulis etiam Sphericis intervienti.

DEMONSTRATIO VI.

15 In quocunque Triangulo proportionales ſunt.
Vt *Rectangulum eſt lateribus Angulum comprehendentibus.*
ad *Rectangulum ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ baſis, & differentiæ laterum.*
ita *Quadratum Radij.*
ad *Quadratum Sinus Semianguli comprehenſi.*

Sit Triangulum *abc.* Fig. 14. 15. 16. & *am.* æqualis *bn.* eritque *mc.* differentia laterum. Sint *em. en.* æquales, relinquetur *bn.* differentia baſis *bc.* & differentiæ laterum *em.* vel *en.* ergo ſi *bd. dn.* æquales ſint, erit *bd.* vel *nd.* ſemidifferentia baſis, & differentiæ laterum. Quia autem addita ſemidifferentia *dn.* parti minori *ne.* efficitur ſemiſumma (§. 12.) erit *de.* ſemiſumma baſis, & differentiæ laterum; quia verò *ab. am.* æquales ſunt, perpendicularis *ap.* ſecabit bifariam Angulum *a.* & rectam *bm.* (5. l. 1.) & conſiderato Arcu *bm.* eſt *ab.* Radius, & *bp.* Sinus ſemiſis Anguli *bam.* (lib. 2. §. 17.)

16 Caracteres ſignificant Q. Quadratum, R. Rectangulum: + plus: — minus: ∞, eſſe æqualem. Primùm igitur demonſtrabitur demiſſa perpendiculari *bo.* in ſingulis tribus caſibus. Q. *bc.* eſſe æqualem 2. R. *ac. em.* + Q. *em.* moxque R. *bac.* ad R. *bdc.* eſſe vt Q. *ab.* ad Q. *bp.*

17 In ſingulis tribus caſibus Q totius vnà cum Q alterius ſegmenti æquatur 2. R. totius in idem ſegmentum, & Q. ſegmenti reliqui (1. l. 2.) ergo Q. *ac.* + Q. *em.* æquatur 2. R. *cam.* + Q. *mc.*

In priori caſu Q. *bc.* ∞, Q. *ba.* + Q. *ac.* hoc eſt Q. *ac.* + Q. *am.* ergo Q. *bc.* ∞, 2. R. *ca. em.* + Q. *mc.*

In ſecundo caſu Q.*bs.*20, Q.*bo.* quod eſt *am.*+ Q.*oc.* 2.R.*cao.*(4.l.2.)

Item Q.*am.*+Q.*oc.*20, 2.R.*cam.*+Q.*mc.* Tùm 2.R. *cam.*+2.R.*cao.*20, 2.R.*ca. am.* (2.l.1.) ergo Q.*am.*+Q. *ac.*+2.R.*cao.*20, 2.R.*ca. om.*+Q.*cm.* ergo Q.*bs.* æquale eſt 2.R.*ca. om.*+Q.*mc.*

In tertio caſu Q.*bs.*+2.R.*cao.*20, Q.*ba.* quod eſt *am.*+ Q.*ac.*(4.l.2.)& Q.*om.*+Q.*ac.*20, 2.R.*coa.*+R.*om. ac.*+ Q.*cm.*(1.l.2.) ergo Q.*bs.*20, 2.R.*om. ac.*+Q.*cm.*

18 In omnibus igitur caſibus Q.*bs.*−Q.*cm.*20, 2.R. *om. ac.*& quia Q.ex tota *bs.*−Q.*cm.* quod eſt *cn.* differentia partium, æquale eſt 4.R.*cbd.* partium inæqualium (2.l.2.) erunt 2.R.*om. ac.*20, 4.R.*cdb.* ergo ½ R.*om. ac.*20, R.*cdb.*

19 Ratio igitur Q.*ab.* ad R.*ab. om.* eſt vt *ab.* ad *am.* ratio verò R.*ab. ac.* ad R.*ac. am.* eſt etiam vt *ob.* ad *om.* (1.l.6.) ergo Q.*ab.* ad R.*ab. om.* eſt, vt R.*ab. ac.* ad R.*ac. om.* igitur Q.*ab.* ad ½ R.*ab. om.* eſt vt R *ab. ac.* ad ½ R.*ac. om.* quod eſt *cdb.*& quoniam Triangula *bom. opm.* Æquiangula ſunt, cum Angulos ad *o.* & *p.* rectos habeant, & Angulum ad *m.* communem; proportionales ſunt *am.* ad *mp.* quæ eſt *bp.* vt *bm.* ad *mo.* (2.l.6.) ergo *am.* ad *bp.* vt ½ *bm.* quæ eſt *bp.* ad ½ *am.* ergo R.*am.* ½ *om.* quod eſt R.*ab.* ½ *om.* quod eſt R. ½ *ab. om.* quod eſt *cdb.* æquatur Q.*bp.* (1.l.6.) cum verò oſtenſum ſit Q.*ab.* ad ½ R.*ab. om.* quod eſt Q.*bp.* eſſe vt R.*ab. ac.* ad R.*cdb.* proportionales erunt.

R. *ab. ac.* laterum Angulum *a.* includentium.
ad R.*cdb.* ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ prædictæ.
vt Q. ex Radio *ob.*
ad Q.*bp.* Sinus Anguli *bod.* quod eſt ½ *bae.*

CAPVT TERTIVM.

RESOLVTIO TRIANGVLI PLANI Rectanguli.

20 VVnumquodque Triangulum tria habet latera, & Angulos tres, ex tribus Angulis Trianguli Plani latera inveniri nequeunt: nam si in Triangulo ABC. *Fig.* 7. continuentur latera, & ducatur DE. parallela CA. Triangulum ABC. eosdem habebit Angulos, ac BDE. (2.l.6.) cum verò infinitæ parallelæ duci possint, infinita Triangula Æquiangula constituentur, quare sola laterum proportio determinari potest, non tamen quantitas Verùm tribus alijs quibuslibet datis invenientur reliqua.

21 Maioris perspicuitatis gratia res datæ, vel cognitæ (quæ à Græcis *Didomena* nuncupantur) à quæsitis *Zitumena* dictis distinguendæ sunt, cognitæ lineola quadam denotantur, quæsita verò punctis, & ab alijs cyphra: vt in Triangulo ABC. *Fig.* 11. Angulus B. & latera AB. AC. dantur cognita, latus autem CB. & Anguli A. & C. supponuntur inquiri.

22 In Triangulo Rectangulo duæ tantùm res postulantur, Angulus enim Rectus pro cognito haberi debet, & propterea à multis lineola nulla insignitur. Latus Angulo Recto subtensum *Hypothenusam* vocamus; Rectas verò Angulum Rectum includentes *Latera*. Cognito Angulo Acuto alterutro, manifestatur reliquus, qui eius complementum est ad Quadrantem, & generaliter observandum est, si *Hypothenusa* in proportione ad sit per demonstrationem primam Triangulum solvt; si autem duo latera reperiantur in proportione resolvitur Triangulum per demonstrationem secundam præmissi capitis.

23 In omni proportione apponitur complementum Logarithmicum prioris termini, vti diximus *lib.* 1. *§.* 119. atque adeò quando Radius primum occupat locum, eius complementum est cyphra, quam scribere opus nequaquam est, summam enim, neque auget, neque minuit, licèt illam in omni praxi conscripserim perspicuitati studens. Complementum autem Logarithmi ita indicatur C. L. ad cuius inventionem sumendum est complementum cuiusque litteræ vsque ad 9. vti diximus *lib.* 1. *§.* 115. In proportionibus vniversis summa trium Logarithmorum, multata Radio, Logarithmum quartum exhibet. Demitur Radius, vnitate sublata, quæ ad sinistram scribenda erat, vel subductis ex Characteristica 10. Si autem prior terminus sit Tangens vltra *grad.* 45. sumetur complementum ad duplum Radium, & à Characteristica, quæ in summa prodit auferentur 20. quod idem est ac demere duplum Radium, quæ in futuros huiusmodi casus hic admonuisse sufficiat.

24 ## PROBLEMA I.

Dato vno latere, & Angulo.

1. *Invenire reliquum latus.* 2. *Invenire Hypothenusam.*

I. INVENIRE RELIQVVM LATVS.

In Triangulo ABC. *Fig.* 6. est BC. pedum 345. Angulus ad B. 40. 00. *min.* ergo A. erit 50. 00. *min.* quæritur latus CA. per *§.* 9.

	Proportio §. 9.		*Gradus.*	*Logarith.*
Vt	BE.	*Radius,*	C. L.	0.0000000
ad	ED.	*Tang. Ang. B.*	40. 00. *m.*	9.9238135
ita	BC.	*Latus cognitum. ped.*	345. *ped.*	2.5378191
ad	CA.	*Latus quæsitum. ped.*	289½. *pe.*	2.4616326

In-

25 *II. INVENIRE HYPOTHENVSAM.*

Proportio §. 8.		*Logarithmi.*
B E *Sin. Ang. A. gr. 50. & 2. Ang. B. 40. gr.*	C. L.	0.1157459
B D. *Radius.*		10.0000000
B C. *Latus opp. A. & cont. B. pedum*	345.	2.5378191
B A. *Hypothenusa, pedum*	450. $\frac{5}{6}$	2.6535650

26 PROBLEMA II.

Data Hypothenusa, & vno latere.

1. *Invenire Angulos.* 2. *Invenire reliquum latus.*

I. INVENIRE ANGVLOS.

In Triangulo A B C. *Fig. 7.* datis B C. B A. quæruntur Anguli A. & B.

Proportio §. 8.		*Logarithmi.*
B A. *Hypothenusa.*	*pedum* 450 $\frac{5}{6}$ C. L.	7.3464349
B C. *Latus.*	*pedum* 345.	2.5378191
D B. *Radius.*		10.0000000
B E. *Sinus Ang. opp. D. vel A. gr.*	50.00.*m.*	9.8842540
qui est Sinus 2. Ang. ad B. gr.	40.00.*m.*	

27 *INVENIRE RELIQVVM LATVS.*

Primò reperiuntur Anguli A. & B. per §. 26. mox per §. 24. invenietur latus.

B E. *Radius.* Fig. 6.		C. L.	0.0000000
E D. *Tang. Ang. B. gr.*	40.00.*m.*		9.9238135
B C. *Latus tonterm. B. ped.*	345.		2.5378191
C A. *Latus oppositum B. ped.*	289. $\frac{5}{6}$		2.4616326

28 PROBLEMA III.

Data Hypothenusa, & vno Angulo.

I. INVENIRE LATERA.

In Triangulo A B C. *Fig.* 8. datis B A. & Angulo B. quæruntur latera BC. CA.

Ad latus CA. inveniendum §.8.			*Logarithmi.*
B D. *Radius.*		C.L.	0.0000000
D E. *Sinus Ang. B.*	*gr.* 40. 00. *m.*		9.8080675
B A. *Hypothenusa data ped.*	450.		2.6535651
C A. *Latus oppositum B. ped.*	289½.		2.4616326

Ad latus CB. inveniendum.

B D. *Radius.*		C.L.	0.0000000
B E. *Sinus 2. Ang. B. gr.*	40. 00. *m.*		9.8842540
B A. *Hypothenusa data ped.*	450.		2.6535651
B C. *Latus conterm. B. ped.*	345.		2.5378191

29 PROBLEMA IV.

Datis duobus lateribus.

1. *Invenire Angulos.* 2. *Invenire Hypothenusam.*

I. INVENIRE ANGVLOS.

In Triangulo A B C. *Fig.* 9. datis B C. C A. quæruntur Anguli B. & A.

Propositio §.9.			*Logarithmi.*
B C. *Latus maius.*	*pedum* 345.	C.L.	7.4621808
C A. *Latus minus.*	*pedum* 289½.		2.4616326
B E. *Radius.*			10.0000000
E D. *Tang minoris Ang. B.*	40. 00. *m.*		9.9238134

quæ est *Tangens 2. Ang. mai. A.* 50. 00. *oppositi maiori lateri.*

30 *II. INVENIRE HYPOTHENVSAM.*

Primò, reperiantur Anguli B. A. per §. 29. deinde Hypothenusam.

Pro Hypoth. ex §. 25.			*Logarithmi.*
D E. *Sinus 1. Ang. B.*	*gr.* 40. 00. *m.*	C.L.	0.1919324
D B. *Radius.*			10.0000000
A C. *Latus oppositum B. pedum*	289½.		2.4616326
A B. *Hypothenusa, pedum*	450.		2.6535650

CA.

CAPVT QVARTVM.

RESOLVTIO TRIANGVLI PLANI Obliquanguli.

31 ### PROBLEMA I.

Datis duobus Angulis, & vno latere.

I. INVENIRE RELIQVA DVO LATERA.

Cognitis duobus Angulis datus etiam est tertius per §. 2. in Triangulo ABC. *Fig.* 10. cogniti sunt Anguli A. & C. & latus CA. inquirunntur latera BA. BC.

Propositio §. 10.	*Partes.*	*Logarithmi.*
Sinus Anguli B.	*gr.* 50. *m.* 15.	C.L. 0.1141629
ad *Latus oppositum CA.*	*ped.* 448.	2.6512780
vt *Sinus Ang. C.*	*gr.* 35. *m.* 20.	9.7621775
ad *Latus oppositum AB.*	*ped.* 337.	2.5276184

& *Sinus Ang. B.* ad *latus CA.* vt *Sinus Ang. A.* ad *latus CB.*

32 ### PROBLEMA II.

Datis duobus lateribus, & alterutro Angulo opposito.

1. *Invenire Angulos duos.* 2. *Invenire reliquum latus.*

I. INVENIRE ANGVLOS DVOS.

In Triangulo ABC. *Fig.* 11. cognitis Angulo B. & lateribus BA. & AC. quæruntur Anguli A. & C.

Propositio §. 10.	*Partes.*	*Logarithmi.*
Latus CA. oppositum B.	*ped.* 400.	C.L. 7.3979400
ad *Sinum Ang. B.*	*gr.* 54. 30. *m.*	9.9106860
vt *Latus AB. oppositum C.*	*ped.* 300.	2.4771212
ad *Sinum Anguli C.*	37. 38. *m.*	9.7857472

Complementum ad 180. Angulorum C. & B. erit Angulus A. per §. 2.

33 *II. INVENIRE RELIQVVM LATVS.*

Primò, reperientur Anguli per §. 32. deinceps latus CB. per §. 31. Sinus Anguli B. ad latus AC. vt Sinus Anguli A. ad latus CB.

34 PROBLEMA III.

Datis duobus lateribus, & Angulo intermedio.

1. *Invenire duos Angulos.* 2. *Invenire reliquum latus.*

I. INVENIRE DVOS ANGVLOS.

In Triangulo ABC. *Fig.* 11. Angulus BAC. est 61. 16. CA. 400. AB. 300. investigantur Anguli B. & C. Complementum 61. 16. est 118. 44. summa Angulorum B. & C. eius semissis 59. 22.

CA. + AB. 700. CA. − AB. 100.

Proportio §. 11.	*Partes.*		*Logarithmi.*
1. *Summa laterum.*	*ped.* 700.	C.L.	7.1549019
2. *Differentia laterum.*	*ped.* 100.		2.0000000
3. *Tang. semissis B. & C. gr.* 59. 22. *m.*			10.1275434
4. *Tang. semidifferentiæ B. & C. gr.* 13. 34. *m.*			9.3824453

Summa 3. & 4. *est B.* *gr.* 72. 56. *oppos. maiori lateri.*
Differentia 3. & 4. *est C.* *gr.* 45. 48. *oppos. minori lateri.*

35 II. INVENIRE RELIQVVM LATVS.

Primò, reperiantur Anguli B. 72. 56. & C. 45. 48. per §. 34. deinde invenietur latus CB. per Problem. 1.

Proportio §. 31.	*Partes.*		*Logarithmi.*
Sinus Anguli C.	*gr.* 45. 48. *m.*	C.L.	0.1445349
Latus oppositum AB.	*ped.* 300.		2.4771212
Sinus Anguli A.	*gr.* 61. 16. *m.*		9.9429335
Latus oppositum CB.	*ped.* 367.		2.5645896

36 Præmissis tribus Problemibus vniversa Rectangula solvi possunt; breviores tamen, & faciliores sunt operationes capitis superioris.

PRO-

37 PROBLEMA IV.
Datis tribus lateribus.

I. INVENIRE ANGVLVM QVEMLIBET. §. 13.

1. *Latus minus BC.*	300.	*in Triangulo ABC. Fig. 13.*	
2. *Latus medium AB.*	400.		*Logarithmi.*
3. *Latus maius AC.*	600.	C.L.	7.2218487
4. *Summa 1. & 2.*	700.		2.8450980
5. *Differentia 1. & 2.*	100.		2.0000000
6. *Differentia segm. AD.*	116⅔.		2.0669467
7. *Diffir. 3. & 6. DC.*	483⅓.		
8. *Semissis 7. est EC.*	241⅔.	*Summa Logarith. 3. 4. & 5.*	
9. *Summa 6. & 8. AE.*	358⅓.	*est Logarith. 6.*	

38 Ergo in Rectangulis AEB. BEC. invenientur Anguli A. & C. cognitis AB. BC. & AE. & CE. per §. 26.

Pro Angulo ABE. & A. per §. 26.		*Logarithmi.*
Hypothenusa AB. pedum	400.	C.L. 7.3979400
ad *Latus, vel segm. AE. pedum*	358⅓.	2.5542869
vt *Radius.*		10.0000000
ad *Sinum Ang. ABE. gr.*	63.37.	9.9522269
qui est *Sinus 2. Ang. A gr.*	26.23.	

Pro Angulo EBC. & C. §. 26.		*Logarithmi.*
Hypothenusa BC.	300.	C.L. 7.5228788
ad *Latus, vel segm. EC.*	241⅔.	2.3832159
vt *Radius.*		10.0000000
ad *Sinum Ang. CBE. gr.*	53.40. *m.*	9.9060947
qui est *Sinus 2. Ang. C. gr.*	36. 20. *m.*	

Summa ABE. EBC. gr. 117. 17. *m. est Ang. ABC.*

39 ALITER.

In eodem Triangulo ABC. *Fig.* 13. inveſtigatur Angulus ABC.

Diſpoſitio per §. 15.			*Logarithmi.*
1. *Latus maius includens*	*AB.*	400.	C.L.7.3979400
2. *Latus minus includens*	*BC.*	300.	C.L.7.5228788
3. *Differentia laterum*	*AB.BC.*	100.	
4. *Latus oppoſitum Ang.*	*ABC.*	600.	
5. *Summa* 3. & 4.		700.	
6. *Differentia* 3. & 4.		500.	
7. *Semiſumma ſemiſsis* 5.		350.	*Log.* 2.5440680
8. *Semidifferentia ſemiſsis* 6.		250.	*Log.* 2.3979400
9. *Summa* 4. *Logarithmorum*			19.8628268
10. *Eius ſemiſsis eſt Sinus Arcus* gr. 58. 38$\frac{1}{2}$. m.			9.9314134
11. *Arcus duplus eſt Ang. ABC.* 117. 17. m.			

REGVLA PRACTICA.

Addantur complementa Logarithmica laterum Logarithmis ſemiſumma, & ſemidifferentia inter baſim, & differentiam laterum; ſemiſsis ſumma erit Sinus 1. *dimidij Anguli.*

Tametſi demonſtratio §. 15. prolixa ſit, & difficilis, hæc tamen praxis inde exorta facilis eſt, & per commoda, cum ſit eadem ac illa, quâ lib. 3. §. 81. vtimur ad Trianguli Spherici reſolutionem.

Finis Libri ſecundi.

LIBER TERTIVS DE TRIGONOMETRIA SPHERICA.

TRigonometria Sphærica *eſt ſcientia Triangulorum, quæ in ſuperficie Sphæræ tribus Arcubus circuli maximi deſcribuntur. Triangulum igitur in ſuperficie plana tribus Arcubus circulorum æqualium, vel inæqualium comprehenſa huiuſce Trigonometriæ obiectum minimè ſunt, non enim formantur in ſuperficie Sphæricâ, neque etiam ſolùm minoribus circulis in ſuperficie Sphæricâ, quàm ſub circuli maximi tribus Arcubus non comprehenduntur. Eſt ergo Trigonometria Sphærica Mathematicæ pars vtiliſſima, cuius vſus latiſſimè diffunditur per omnia, quæ ad Sphæram, Geographiam, Nauigationem, Horologiographiam, & Aſtronomiam pertinent, vt in eius applicatione videre licebit, ad huius tamen intelligentiam non vlla elementa Sphæricæ requiruntur, quæ in prioribus capitibus demonſtrantur, nè lector abtinendæ demonſtrationis gratia ad Theodoſij, vel Menelai Sphæricæ ablegandus ſit.*

CAPVT PRIMVM.

DE CIRCVLIS MAXIMIS, ET ANGVLIS Sphæricis.

1 *Circulus Maximus in Sphæra est, qui commune cum illa centrum habet.* Hinc fit quamlibet circuli Diametrum per eius centrum transeuntem, transire quoque per centrum Sphęræ, atque huius etiam Diametrum esse, quia autem Diameter Sphæræ maior Recta est omnium, quæ in ea consistere possunt, circulus eádem habens Diametrum, maior quoque est, & Maximus appellatur; nullus enim maior dari potest, licèt infinitos admirtat æquales. Reliqui omnes circuli, qui Maximi non sunt, neque commune cum Sphæra centrum habent, vocantur circuli minores, inter quos, qui longius à centro distat minor est propinquiore, cuius demonstratio eadem est, quàm chordarum circuli. (2. l. 3.)

2. *Duo Circuli Maximi bifariam se inter secant.*

Fig. 1.

Circuli EGF. EDF. secantur in punctis E. F. eritque communis Sectio planorum suorum recta EAF. (1. l. 11.) ergo quia centrum Sphæræ omnibus circulis Maximis est commune, erit in vtroque plano (ſ. 1.) & in communi Sectione EAF. igitur cum EAF. transeant per centrum vtriusque Diameter communis erit, & Semicirculi EGF. EDF. idem dices de quibuslibet alijs duobus circulis Maximis.

3 *Polus Circuli Maximi est punctum in superficie Sphæræ, à quo omnes Rectæ, vel Arcus ad Circumferentiã Circuli pro tracti æquales sunt, & gr. 90. constãt, vel Quadrans Circuli.*

Concipiatur circulus EDF. si omnes Arcus à pũcto R. exeuntes NR. RD. RP. æquales sint; erit punctum R. Polus circuli EDF. patet ratione, quia omnes Arcus à pũ-

cto

cto E. ducti EV. EA. ED. EG. æquales existunt; erit E. Polus circuli, quem refert recta VAG. A. verò Polus circuli FGF. &c. Ergo cum EAF. Semicirculus sit §. 2. & EA. AF. æquales, erunt Quadrantes *gr.* 90. &c.

4 *Angulus Sphæricus est duorum Circulorum Maximorum ad invicem inclinatio, eius autem mensura Planorum suorum inclinatio, vel Arcus Circuli Maximi interceptus, qui Polum suum habet in concursu, vel puncto Anguli.*

Circuli EDF. EGF. secantur in puncto E. & E. Polus est circuli GDAV. dico Arcum GD. mensuram esse Anguli GED. circuli HX. GV. secantur in A. puncto, quod Polus est circuli EGFV. Arcus verò HG. mensura est Anguli HAG. circuli ECF. TGI. secantur in C. puncto, quod Polus est circuli MSZ. & Arcus NS. mensura est Anguli Sphærici ECS. &c.

5 *Angulus quem duo Circuli Maximi efficiunt, æquatur distantiæ Polorum suorum, & è contra.*

Sint circuli EDF. EGF. quorum Poli A. R. Angulus verò GED. atque eius mensura GD. quia RD. & AG Quadrantes æquales sunt (§. 3.) ablato Arcu communi AD. relinquetur AR. Polorum distantia æqualis DG. mensuræ Anguli DEG. denominatio Anguli Sphærici eadem est, quæ Rectilinei; si *gr.* 90. sit, erit Rectus: si verò *gr.* 90. minor, Acutus: si maior, Obtusus; idem dicendum est de complementis eorum ad Quadrantem, vel Semicirculum, &c.

6 *Si quivis Circulus per Polos alterius transeat, Polos suos in altero habebit, & cum illa Angulos Rectos constituet, & è contra.*

Sit circulus EGFV. cuius Polus A. per quem transit circulus GAV. nio Polum circuli GAV. esse in circulo GEV. Angulus verò ad V. & G. Rectos esse 90. *gr.* dividatur Semicirculus GEV. bifariam in E. & ducto circulo EAF. quia Arcus AE. ex Polo A. Quadrans est (§. 3.) & EV. EG. Quadrantes quoq; æquales existunt; erit E. Polus

circuli GAV. (§. 3.) & inuſt in circulo GEV. ergo cum EA. diſtantia Polorum æqualis ſit Angulo EVA. (§. 5.) erit hic *grad.* 90. æqualis Quadranti EA. ergo Rectus; & rurſum EGA. AGF. FVA. ſimiliter, quoniam circuli YRO. MRZ. GRV. tranſeunt per punctum R. Polum circuli EDF. Recti erunt Anguli ad N. D. P. &c. Viceverſa ſi Anguli ad V. & G. Recti exiſtant, diſtantia Polorum E. A. erit *gr.* 90. ergo VAG. tranſibit per Polum A. & VEG. per Polum E. (§. 5.)

7 *Anguli quos duo Circuli Maximi efficiunt in duabus ſectionibus, æquales ſunt; item illorum complementa, & vnuſquiſque cum complemento ſuo æquivalet duobus Rectis, Verticales autem æquales ſunt inter ſe.*

Sint circuli EGF. EDF. puncta verò ſectionum E. P. & A. Polus circuli EGF. aſſumptis EG. GF. Quadrantibus æqualibus; circulus GAV. habebit Polos ſuos in E. & F. (§. 6.) ergo Arcus GD. erit menſura Angulorum GED. DFG. (§. 4.) atque æquales erunt iſti, cum vnam, & eandem menſuram habeant. Item illorum complemẽta DEV. VFD. cum eorum menſura ſit DV. igitur quia Arcus GD. DV. Semicirculum conſtituunt, ſunt GFD. DFV. rurſus GED. DEV. æquales duobus Rectis. Eadem eſt ratio in circulis GAV. HAX. quoniam circulus EGF. Polum ſuum habet in concurſu A. & I G. HV. Semicirculum efficiunt; GAH. HAV. duobus Rectis æquivalent, & quia GHV. HVX. Semicirculi æquales ſunt, demto Arcu communi HEV. remanebunt æquales GH. VX. qui menſura ſunt Angulorum Verticalium oppoſitorum GAH. VAX. ergo iſti æquales erunt. (§. 4.)

CAPVT SECVNDVM.

DE TRIANGVLIS SPHÆRICIS in communi.

8 TRiangulum Sphæricum eſt, quod Circuli Maximi tribus Arcubus illud intercidentibus, in ſuperficie Sphæræ comprehenditur.

Eius denominatio eadem eſt, quam Trianguli Plani Rectilinei. Si Rectum Angulum habeat, Rectangulum erit. Si Obtuſum, erit Obtuſangulum. Si verò omnes tres Angulos Acutos habeat, erit Acutangulum. Dicitur Æquilaterum, cum tria latera æqualia ſint. Iſoſceles verò cum duo latera habet æqualia: Scalenum, ſi tria latera inæqualia ſint.

9 *Demonſtrationes prop. 4. 5. & 6. noſtræ Geometriæ communes ſunt etiam Triangulis Sphæricis.*

De Triangulis omninò æqualibus.

1. Si tria latera unius æqualia ſint tribus alterius. 2. Si duo latera duobus alterius æqualia, æqualem Angulum comprehendant. 3. Si duo Anguli, & unum latus, alterius æqualibus correſpondeant. 4. Si duo latera æquentur duobus alterius, unũ verò Angulum oppoſitum æqualem habeãt, & alterum eiuſdem ſpeciei; omnia erunt æqualia.

10 De Trianguli partibus.

1. Latera æqualia, æquales Angulos ſubtendunt. 2. Æquales Anguli opponuntur lateribus æqualibus. 3 Maius latus, maiorem Angulum ſubtendit; maior verò Angulus latus maius. 4. Quælibet duo latera maiora ſunt reliquo. Conſectaria. *5. Triangulum Æquilaterum, Æquiangulum eſt: Æquiangulum verò, Æquilaterum etiam eſt. 6. In Triangulo Iſoſcele Arcus qui biſariam ſecat baſim, biſariam ſecat, & Angulum. Si verò biſariam ſecet Angulum, baſim quoque biſariam ſecabit, & perpendicularis eſt, & è contra. 7. Si perpendiculum biſariam ſecet baſin unius Trianguli, Angulum quoque biſariam*

secabit, si verò Angulum, etiam basim, si tamen Arcus basim, & Angulum bifariam secet, perpendicularis erit, & Triangulum perpetuò Isosceles. 8. *Si duo Arcus æquales à puncto in alium cadent, à Perpendiculo, quod Quadrans non est, æqualiter recedent, & cum illo æquales Angulos constituent, & è contra: maior verò Arcus minorem efficit Angulum; & magis à Perpendiculo recedit si Anguli sint Acuti, minus si Obtusi.* 9. *Minor Arcus à puncto in alium cadens est Perpendiculum, quod unicum est, nisi Quadrans fuerit.*

11 De Triangulorum inæqualitate.

1. *Si duo Triangula duo latera habeant æqualia, quod maiorem continet Angulum, basim habebit maiorem.* 2. *Quod autem maiorem habet basim, Angulum continebit maiorem.* 3. *Si duo Triangula eadem, vel æquali basi constituta sint, quod super illa unum Angulum maiorem habuerit, alterum verò minorem, vel æqualem, & latera habebit minora.* 4. *Continebunt tamen Angulum maiorem.* 5. *Idem erit si à basis terminis duo Arcus ad punctum intra Triangulum concurrant.*

Hæ omnes propositiones eodem modo demonstrantur, quo 4. 5. & 6. *lib.* 1. nostræ Geometriæ, atque adeò illarum demonstrationes hìc inculcare superfluum videretur.

12 *In qualibet Triangulo Sphærico tria latera minora sunt integro Circulo.* Fig. 1.

Sit quodvis Triangulum YPF. productis circulis, vsque ad inter Sectionem O. aliud Triangulum exurgit PFO. cuius latera PO. OF. maiora sunt PF. §. 10. ergo Semicirculi duo YPO. YFO. maiores sunt tribus lateribus PF. FY. YP. quare tria latera minora sunt integro circulo.

13 *Dato quocumque Triangulo, aliud secundum efficitur in Polis Arcuum suorum, eorum duo latera æqualia sunt duobus Angulis primi, tertium autem latus complementum est Anguli reliqui, idem dicis de Angulis secundi, cum lateribus primi.*

Sit

Sit Triangulum A B C. Polus Arcus A C. eſt Z. Polus B A. eſt Y. & B C. eſt R. dico in Triangulo Y R Z. latera Y R. R Z. æqualia eſſe Angulis A B C. B C A. & latus Y Z. eſſe complementum ad Semicirculum Anguli B A C. quoniam Quadrantes Y Q. R P. æquales ſunt, ſubducto R Q. erit Y R. æqualis Q P. menſuræ Anguli A B C. & dempto S R. ex Quadrantibus Z S. R N. ſupererit Z R. æqualis S N. menſuræ Anguli A C B. & adiecto X Z. Quadrantibus Y X. Z I. fiet Y Z. æqualis I X. menſuræ Anguli X A I. complementi Anguli C A B. ergo patet veritas, &c.

14 Eadem ratione ſi aſſumamus Polum O. Arcus B A. in Triangulo R Z O. erit R Z. æqualis S N. menſuræ Anguli B C A. & dempto O I. ex Quadrantibus H O. I Z. remanebit O Z. æqualis I H. menſuræ Anguli B A C. & R O. complementum erit R Y. hoc eſt Q P. menſuræ Anguli A B C. Rurſus ſi ſummamus Polum M. Arcus A C. in Triangulo M Y R. erit M Y. æqualis H I. menſuræ Anguli H A I. & Y R. æqualis Q P. menſuræ Anguli A B C. & M R. complementum Arcus R Z. hoc eſt N S. menſuræ Anguli B C A. &c. Ergo univerſaliter ſemper reperitur Triangulum ſecundum, cuius duo latera æquantur quibuslibet duobus Angulis primi, tertium verò latus complementum eſt Anguli tertij.

15 *Dato qualibet Triangulo in Polis ſuarũ Arcuum aliud conſtituitur, cuius trialatera complementa ſunt ad Semicirculũ trium Angulorum primi, tres verò Anguli ſecũdi complementa trium laterum primi.* Fig. 1.

In eodem Triangulo A B C. ſi aſſummamus Polos R. Arcus B C. M. Arcus A C. & O. Arcus B A. exurgit Triángulum M R O. latus M R. complementum eſt R Z. hoc eſt N S. menſuræ Anguli B C A. & R O. complementum eſt Y R. hoc eſt Q P. vel A B C. & M O. complementum O Z. hoc eſt H I. vel B A C. ergo trialatera Trianguli M R O.

complementa sunt Triangulorum ad A.B.C. insuper I S. mensura Anguli ad M. complementum est S T. vel A C. & Q H. mensura Anguli ad O. complementum est Q X. vel A B. & N P. mensura Anguli M R O. complentum est Arcuum E N. P F. hoc est C D B. ablato eoim N D. ex Quadrantibus E D. N C. remanent æquales E N. D C. & rursus dempto D P. ex Quadrantibus F D. P B. supersunt F P. D B. æquales: ergo tres quoque Anguli Trianguli R M O. complementa sunt trium laterum A B C. & constat propositum, &c.

16 *In quocunque Triangulo Sphærico Angulus Externus minor est duobus Internis oppositis.* Fig. 1.

Sit Triangulum A B C. & Angulus externus A C P. quia in tribus Polis M. Y. R. Triangulum Y R M. constituitur, & latus Y R. æqualis est Angulo A B C. & Y M. Angulo C A B. & M R. complementum est Anguli A C B. (§. 13.) erit M R. æqualis Angulo A C P. & cum M R. minor sit M Y. Y R. (§. 10.) erit Angulus Externus A C P. minor duobus Internis oppositis A B C. C A B. &c.

17 *In qualibet Triangulo Sphærico tres Anguli maiores sunt duobus Rectis, minores verò sex.* Fig. 1.

Sit Triangulum A B C. Anguli duo A B C. C A B. maiores sunt externo A C P. (§. 16.) ergo tres A B C. C A B. B C A. maiores existent duobus B C A. A C P. quia verò duo B C A. A C P. duobus Rectis æquivalent (§. 7.) erunt tres A B C. C A B. B C A. duobus Rectis maiores: pari ratione in Triangulo M R O. quilibet Internus cum suo Externo duos conficit Rectos M R O. cum O R Z. (§. 7.) ergo tres Interni cum tribus Externis componunt sex Rectos, quare ablatis Externis remanebunt Interni sex Rectis minores.

18 *Triangulum Sphæricum habere potest tres Angulos Rectos, duos Rectos, & unum Obtusum; item duos Obtusos, & unum Rectum, & tres Obtusos.*

In Triangulo A F G. tres Anguli A F G. G A F. F G A. Re-

Recti sunt, in quo casu omnia tria latera sunt Quadrantes. In Triangulo HAF. Anguli ad F. & H. Recti sunt, & HAF. Obtusus: duo latera sunt Quadrantes HA. AF. & HF. Quadrante maius. In Triangulo NZF. Anguli ad Z. & F. Obtusi sunt, & Angulus ad N. Rectus. In Triangulo MRO. tres Anguli Obtusi sunt.

CAPVT TERTIVM.

DE TRIANGVLIS SPHÆRICIS singillatim.

19 *IN Triangulo Rectangulo latera Angulum Recto ambientia eiusdem speciei sunt cum interuallo oppositis.*

In Triangulo EDG. DG. minus est Quadrante, quia Angulus ad E. Acutus est, & EG. Quadrans est, quòd Angulus ad D. Rectus sit. In Triangulo EBH. latera BH. HE. minora sunt Quadrante, sicut Anguli oppositi ad E. & B. In Triangulo NZF. Angulus Rectus est ad N. & latera NZ. NF. Quadrantem excedunt, vti Anguli Obtusi ad F. Z.

20 *In Triangulo Rectangulo, si Anguli Obliqui, vel latera Anguli Recti sint eiusdē speciei; Hypothenusa minor erit Quadrante; si verò diuersæ, Hypothenusa maior erit Quadrante.*

In Triangulo EBH. Anguli ad B. E. Acuti sunt, & Hypothenusa EB. minor Quadrante ED. In Triangulo GRZ. Anguli ZRG. GZR. sunt eiusdem speciei Obtusi, & Hypothenusa ZR. minor Quadrante ZS. In Triangulo YRG. latera RG. GY. eiusdem speciei sunt Quadrante maiora, Hypothenusa verò YR. minor. In Triangulo HBF. latera BH. HF. diuersæ speciei sunt, & Hypothenusa BF. Quadrante maior. In Triangulo ECI. Anguli ad C. E. diuersæ sunt speciei, & Hypothenusa EC. maior Quadrante ED.

21 *In Triangulo Rectangulo Anguli duo superant Quadrantem, & quiuis Angulus Obliquus maior est differentia alterius, & Quadrantis.*

In Triangulo EBH. tres Anguli EBH. HEB. BEH. duos Rectos excedunt (§. 17.) ergo ablato Recto H. erunt BBH. HBE. plus quàm Rectus: ergo quia verò quia B. cum complemento suo ad Quadrantem Rectum constituit, erit Angulus ad E. maior complemento Anguli ad B. & in Triangulo FBH. cõtinuatis circulis exurgit Triangulum BHE. Angulus ad E. ostensus est maior differentia Anguli EBH. & Quadrantis: differentia verò à Quadrante Anguli EBH. & FBH. vna, & eadem est (l. 1. §. 16.) ergo quia Anguli ad E. & F. æquales sunt (§. 7.) erit F. maior differentiâ inter Quadrantem, & Angulos HBF. doctrina tradita in §§. 17. 18. 19. 20 & 21. magni momenti est ad cognoscendum num Triangulum recte propositum, vel solutum sit.

22 *In Triangulo Isoscili Anguli ad basim eiusdem sunt speciei cum lateribus, & è contra.*

In Triangulis YRZ. RMO. suppositis YR. RZ. æqualibus, item RM. RO. tranſeat per Angulum ad R. & Polum A. basium YZ. MO. circulus VRAG. eruntque Anguli ad V. & G. Recti, §. 6. Ergo in Rectangulis VRY. VRZ. GRM. GRO. Anguli ad Y. Z. eiusdem speciei cum latere oppoſito VR. Quadrante minores existent, vti latera YR. RZ. & Anguli ad M. O. eiusdem speciei cum RG. maiores Quadrante GA. (§. 19.) veluti latera RM. RO.

23 *In quovis Triangulo Obliquangulo, ſi Anguli ad basim eiusdem speciei ſint; Perpendicularis ab Angulo in basim intra Triangulum cadet, ac erit eiusdem speciei cum Angulis; ſi verò ij diverſa ſint ſpeciei, extra cadet, & Anguli Externi ſpeciem ſervabit.*

In Triangulo ABC. cadat Perpendicularis AD. alteri Angulorum Acutorum oppoſita, ſitque B. ergo quia AD. latus est Anguli Recti, eiusdem ſpeciei erit cum Angulo ABC. qui minor eſt Quadrante, §. 19. Ergo in Rectangulo ADC. Angulus C. oppoſitus lateri DA. erit

Acu-

Acutus (§. 19.) Ergo A O. opponitur Angulo Interno Acuto BCA. & non Externo Obtuso ACP. & cadit intra Triangulum, & est A O. minor Quadrante, vt B. & C. In Triangulo RMO. si Anguli M. O. sint Obtusi, erit R G. opposita M. maior Quadrante: ergo etiam opponitur Angulo Obtuso O. itaque cadit inter O. & M. §. 19. In Triangulo ROZ. Perpēdiculatis R V. opponitur Angulo Acuto ROZ. & ita minor est Quadrante, §. 19. Ergo opponitur Angulo Externo Acuto RZV. & non Interno Obtuso RZO. §. 19. ergo extra cadit. E contra Perpendicularis R G. quæ opponitur Angulo Externo Obtuso ROG. erit Quadrante maior.

24 *In Obliquangulo inæquales Angulos ad basim habenti, si Acuti extiterint, maius segmentum basis, vel Anguli Verticalis, vna terminatum erit maiori lateri, & è contra si Anguli fuerint Obtusi.*

In Triangulo YRZ. perpendicularis R V. incidit in basim YVZ. ergo quia latus RZ. maius supponitur, longius à Perpendiculo distabit (§. 10.) ergo Segmentum ZV. maius est Segmento YV. & Angulus ZRV. maior quàm VRY. (§. 10.) Viceversa in Triangulo MRO. in quo Anguli ad M. O. Obtusi sunt, si à Semicirculis æqualibus ZRM. YRO. auferantur Segmenta inæqualia ZR. YR. inæqualia manebunt RO. RM. eritque RM. minus quàm RO. igitur Angulus MRG. æqualis VRZ. maior est quam Angulus GRO. æqualis VRY. Segmentum verò MG. æquale VZ maius est quam GO. æquale YV.

25 *In Obliquangulo duos Angulos Acutos habenti, latus minori oppositum minus est Quadrante; si verò duos Angulos Obtusos habuerit, latus maiori subtensum maius est Quadrante.*

In Obliquangulo RYZ. duo Anguli ad Y. Z. Acuti sunt, & Y. maior Z. ergo RZ. maius est RY. (§. 10.) igitur perpendicularis R V. facit Angulum YRV. minorem ZRV. (§. 24.) cum autem YRZ. minor sit duobus Rectis, existet YRV. Acutus recto minor: ergo quia in Rectan-

gulo *R V Y*. Anguli *Y R V*. *V Y R*. eiuidem ſpeciei ſunt Acuti, erit Hypothenuſa *R Y*. Quadrante minor (*ſ*. 20.) igitur latus *Y R*. minori Angulo *R Z V*. oppoſitum Quadrante minus eſt. Viceverſa in Triangulo *M R O*. quod Angulos ad *M*. *O*. habet Obtuſos, latus maius *R O*. maiua Quadrante exiſtet, eſt enim complementum lateris *Y R*. Quadrante minoris.

26 *In Triangulo Acutangulo vnumquodque latus ſingillatim Quadrante minus eſt.*

In Triangulo *A B C*. perpendicularis *A D*. intra cadit, cum Anguli ad *B*. & *C*. Acuti ſint (*ſ*. 23.) ergo quia *B A C* etiam eſt Acutus, erit *D A C*. Acutus: igitur in Rectãgulo *A D C*. enm Anguli *C A D*. *D C A*. eiuidem ſpeciei ſint; Hypothenuſa *A C*. Quadrante minor erit. Idem demonſtrabitur de *A B*. ſi verò Perpendicularis à puncto *C*. ad *B A*. procedat, oſtendentur quoque *C A*. *C B*. Quadrante minora: igitur vnumquodque latus Quadrante minus eſt.

27 *In Obtuſangulo, ſi tria latera Quadrante maiora exiſtant, tres Anguli Obtuſi erunt, non verò è contra.*

In Triangulo *R M O*. trialatera *M R*. *R O*. *O M*. Quadrante maiora ſunt: ergo in tribus Polis *A*. *B*. *C*. Triangulum *A B C*. conſtituitur, cuius Anguli complementa ſunt laterum primi (*ſ*. 15.) ergo Triangulum *A B C*. Acutangulum eſt: igitur eius latera *A B*. *B C*. *C D*. Quadrante minora exiſtunt (*ſ*. 26.) ergo illorum complementa, quæ ſunt Anguli ad *R*. *M*. *O*. (*ſ*. 15.) Quadrante maiora ſunt, atque adeò Anguli Obtuſi exiſtunt. Non è contra, tria enim latera Quadrante minora vnum Angulum Obtuſum habere poſſunt: ergo Polorum Triangulum tres Angulos Obtuſos habebit, latus verò Quadrante minus, quia ex complementis conflatur.

(*ſ*. 15.)

CA-

CAPVT QVARTVM.

DEMONSTRATIONES AD TRIANGVLA Sphærica Rectangula.

28 PEculiaris laterum, & Angulorum vnius Trianguli ſolutio in partium proportionem nititur, quæ demonſtrata ad harũ cognitionem facilè ad modum pervenitur. Claritati conſulens Rectanguli proportionem hoc 4. capite oſtendam, in 5. verò Obliquanguli, & in 6. priva tam trium laterum, vel Angulorum rationem demonſtrabo. In Triangulis *Rectangulis* latus Angulo Recto ſubtenſum Hypothenuſa eſt, ex lateribus Angulum Rectum includentibus alterum baſis eſt, alterum Perpendiculum. Baſis eſt latus, quod cum Hypothenuſa Angulum vnum complectitur, latus verò oppoſitum illi Angulo Perpendiculum erit: vndè quodlibet eſt baſis reſpectu Anguli contermini, & Perpendiculum reſpectu oppoſiti.

29 PROPOSITIO I.

In Triangulis Rectangulis eundem Angulum Acutum ad baſim habentibus, Hypothenuſarum Sinus, Perpendiculorum Sinibus proportionales ſunt. Fig. 2.

Sit NCOA. Sphæræ octava pars, eius centrum A. & NE. CO. ON. Quadrantes ad Angulos Rectos, eritque N. Polus OC. & C. Polus NO. & O. Polus NC. concipiantur ex Polis N. & O. quilibet alij Quadrantes NG. OR. ſe adinvicem Secantes in I. & cum Anguli OCN. NGO. Recti ſint (§. 6.) erunt duo Triangula RCO. IGO. Rectangula eundem Angulum Acutum IOG. ROC. ad baſes habentia. Ex puncto R. cadat Recta RB. Perpendicularis ad communem Sectionem AC. eritque Sinus Arcus RC. & Perpendicularis ad planum AOC. (23. P.) Perpendicularis IH. ad communem

Sectionem AG. Sinus erit Arcus I G. & in plano ORA. eſt *R* A. Radius, & Sinus Quadrantis OR. tùm I P. Perpendicularis ad communem Sectionem O A. Sinus eſt Arcus OI. Dico Sinus Hypothenuſatum OR. OI. proportionales eſſe Sinibus Perpendiculorum *R* C. IG. hoc eſt Rectam *A R*. eſſe ad P I. vt Recta *R* B. ad I H.

30 *Demonſtratio.* *R* B. I H. quia Perpendiculares ſunt ad planum A O C. parallelæ erunt (2. l. 11.) tùm *R* A. I P. cum eodem plano A O R. ſint, & Perpendiculares ad O A. parallelæ quoque erunt inter ſe (2. l. 1.) ergo Anguli A *R* B. P I H. ex Rectis parallelis compoſiti, paralleli erunt, & æquales (3. l. 11.) & quia Anguli *R* B A. I H P. Recti æquales ſunt, erunt *R* A B. I P H. etiam æquales, (3. l. 1.) & Triangula A *R* B. P I H. Æquiangula: ergo latera proportionalia ſunt. (2. l. 6.)

Proportio.

Vt	*A R.*	*Sinus Hypothenuſæ.*	OR.
ad	*R* B.	*Sinum Perpendiculi.*	R C.
ita	P I.	*Sinus Hypothenuſæ.*	OI.
ad	I H.	*Sinum Perpendiculi.*	I G.

Ergo etiam alternando, & invertendo, &c.

31 PROPOSITIO II.

In ijſdem Triangulis Sinus baſium proportionales ſunt Tangentibus Perpendiculorum. Fig. 2.

In planis A N C. A N G. ſint C E. G L. Perpendiculares in Radios A C. A G. & erit C E. Tangens Perpendiculi *R* C. & G L. Tangens Perpendiculi I G. (l. 1. 9. 12.) quia autem H I. L G. in eodẽ inſunt plano, & Perpendiculares ſunt ad G A. erunt ad invicem parallelæ (2. l. 1.) vti etiam *R* B. E C. ergo C E. G L. parallelæ ſunt (2. l. 11.) ducta verò G F. Perpendiculari ad O A. erunt C A. G F. parallelæ (2. l. 1.) & C A. Sinus Quadrantis O C. & G F.

Si-

Sinus Arcus OG. (l. 1. §. 11.) & cum Anguli ACE. FGL. Recti æquales sint, & paralleli, erunt quoque plana FGL ACE. parallela; quia autem secantur plano ORA. communes Sectiones AE. FL. parallelæ sunt, & insuper Anguli ad A. F. & E. L. paralleli æquales, quæ omnia constat ex (3. l. 11.) ergo Triangula ACE. FGL. Æquiangula sunt, vt antea, & illorum Homologa latera proportionalia. (2. l. 6.)

32. *Proportio.*

Vt	AC.	*Sinus Basis.*	OC.
ad	CE.	*Tangentem Perpendiculi.*	RC.
ita	FG.	*Sinus Basis.*	QG.
ad	GL.	*Tangentem Perpendiculi.*	IG.

Ergo alternando quoque, & invertendo, &c. (4. l. 5.)

CAPVT QVINTVM.

DEMONSTRATIONES AD TRIANGVLA Sphærica Obliquangula.

33. DEmonstrationes sequentes Obliquangulorum solutioni inserviunt, quando duo latera, & vnum Angulum nota dantur, vel è contra. Præcedentibus nituntur, & illarum sunt Consectaria.

34. PROPOSITIO I.

In quolibet Triangulo Sinus laterum proportionales sunt Sinibus Angulorum oppositorum. Fig. 1.

Sit Triangulum ABC. productis lateribus BA. QCAS. BCP. CBN. vsque ad Quadrantem, erit QP. mensura Anguli B. & NS. Anguli C. Dico Sinum BA. ad Sinum Anguli oppositi C. qui est NS. ita se habere, vt Sinus AC. ad Sinum B. qui est QP. Ex Angulo A. cadat Perpendiculum AD. Triangula Rectangula CSN. CAD. Angulum ACB. communem habent, & Triangu-

 la.

la B Q P. B A D. communem quoque habent Angulum A B C. ergo Sinus Hypothenusarum proportionales sunt Sinibus Perpendiculorum, §. 29.

35

Proportio 1.	*Proportio 2.*
vt C S. *Sinus totus, qui est* B Q.	B Q. *Sinus totus, qui est* C S.
ad S N. *Sinum* A C B.	Q P. *Sinum* A B C.
ita C A. *Sinus lateris.*	B A. *Sinus lateris.*
ad A D. *Sinum Perpendiculi.*	A D. *Sinum Perpendiculi.*

Rectangulum sub mediis æquatur Rectangulo sub extremis (1.l.6.) extrema verò sunt eadem in duabus proportionibus: ergo Rectangulum S N. C A. æquale est Rectangulo sub Sinu toto, & Perpendiculo A D. Rursus Rectangulum Q P. B A. æquale est Rectangulo sub Sinu toto, & Perpendiculo A D. igitur Rectangulum sub mediis S N. C A. æquatur Rectangulo sub alijs mediis Q P. B A. ergo latera reciprocè proportionalia sunt (1.l.6.) vt Sinus S N. ad Sinum Q P. ita Sinus B A. ad Sinum C A. & alternando, vt Sinus S N. Anguli C. ad Sinum lateris eius oppositi B A. ita Sinus Q P. Anguli B. ad Sinum sui lateris oppositi A C.

36 PROPOSITIO II.

In quocumque Triangulo & obuio Angulo Perpendiculum cadat, efficient cum lateribus duos Angulos Verticales, & eorum Sinus 1. Sinibus 2. Angulorum ad basim proportionales erunt.

Fig. 1.

In Triangulo A B C. Perpendiculum est A D. Anguli verò Verticales B A D. D A C. quorum mensuræ H G. G I. & ablato G O. à Quadrantibus æqualibus H O. G F. remanet F O. æqualis G H. & insuper E M. æqualis G I. item O P. complementum est P Q. mensuræ A B C. & M N. complementum N S. mensuræ A C B. ergo in Rectangulis E N M. F P O. quibus Anguli ad N. P. Recti sunt, & æquales Acuti E. F. (§. 7.) Sinus Hypothenusarum, Perpendiculorum Sinibus proportionales existent. §. 29.

Pro-

Propertio.

Vt *Sinus EM. quod eſt G I. vel C A D. Verticalis.*
ad *Sinum MN. qui eſt 2. NS. vel ACB. ad Baſim.*
ita *Sinus FO. qui eſt GH. vel B A D. Verticalis.*
ad *Sinum OP, qui eſt 2. PQ. vel A B C. ad Baſim.*

PROPOSITIO III.

Item ſunt proportionales Sinus 2. Angulorum Verticalium Tangentibus ſecundis laterum. Fig. 1.

In eodem Triangulo A B C. eſt F I. complementum I G. menſuræ C A D. & I C. complementum C A. & E H. Arcus H G. menſuræ Anguli B A D. & H B. Arcus B A. ergo ex §. 31. Sinus baſium proportionales ſunt Tangentibus Perpendiculorum, cum Anguli ad E. F. ijdem ſint §. 7.

Proportio ex §. 31.

Vt *Sinus F I. qui 2. eſt I G. vel C A D. Anguli Verticalis.*
ad *Tangentem I C. quæ 2. eſt lateris C A.*
ita *Sinus E H. qui 2. eſt H G. vel B A D. Ang. Verticalis*
ad *Tangentem H B. quæ 2. eſt lateris B A.*
& proportionales ſunt etiam alternando, invertendo, &c.

38 PROPOSITIO IV.

Sinus 2. laterum proportionales ſunt Sinibus 2. Segmentorum, quæ à Perpendiculo in baſi fiunt. Fig. 1.

In eodem Triangulo A B C. baſis Segmenta ſunt B D. C D. ſiquidem perpetuò ſumuntur ab Angulo baſis, vſque ad Perpendiculum, licèt hoc cadat extra. Deinde E B. complementũ eſt B D. & H B. ipſius B A. rurſus F C. complemennũ eſt C D. & I C. ipſius C A. Anguli verò ad I. H. Recti, & ad F. E. ijdem, vel æquales (§. 7.) ergo ex §. 29. proportionales ſunt Sinus Hypothenuſarum Sinibus Perpendiculorum in Rectangulis E B H. F C I.

Proportio §. 29.

Vt *Sinus EB. qui eſt 2. Segmenti.* BD.
ad *Sinum BH. qui eſt 2. lateris.* BA.
ita *Sinus FC. qui eſt 2. Segmenti.* CD.
ad *Sinum CI. qui eſt 2. lateris.* CA.

Itemq; proportionales ſunt alternando, invertendo, &c.

39 PROPOSITIO V.

Sinus 1. Segmentorum proportionales exiſtunt Tangentibus 2. Angulorum ipſis conterminorum ad baſim. Fig. 1.

In ipſomet Triangulo ABC. ſubducto DP. ex Quadrantibus BP. DF. relinquitur FP. æqualis Segmento BD. & EN. Segmeoto DC. atque OP. complementum eſt PQ menſuræ ABC. & MN. complemẽtum NS. menſuræ ACB. Anguli ad N. P. Recti ſunt (§. 6.) & E. F. æquales, vel ijdem (§. 7.) ergo in Rectangulis ENM. FPO. proportionales ſunt Sinus baſium Tangentibus Perpendiculorum, ex §. 31.

Proportio §. 31.

Vt *Sinus FP. qui eſt Segmentum* BD.
ad *Tangentem PO. qua eſt 2. QP. vel Ang.* ABD.
ita *Sinus EN. qui eſt Segmentum* DC.
ad *Tangentem NM. qua eſt 2. NS. vel Ang.* ACB.

Atque etiam proportionales ſunt alternando, invertendo, &c.

40 PROPOSITIO VI.

Tangentes Angulorum Verticalium proportionales ſunt Tangentibus Segmentorum baſis. Fig. 1.

Per §. 31. Sinos AG. ad Sinũ AD. eſt vt Tangens GH. ad Tangentem DB. & vt Sinus AG. ad Sinum AD. ita etiam Tangens GI. ad Tangentem DC. ergo proportionales quoque erunt ex. (§. 5.)

GH. *Tangens* BAD.
BD. *Tangens Segmenti.*
GI. *Tangens* CAD.
DC. *Tangens Segmenti.*

Ergo etiam alternando, & invertendo, &c. CA.

CAPVT SEXTVM.

DEMONSTRATIO AD TRIA LATERA, vel tres Angulos.

41 PROPOSITIO I.

Sinus Semi[illegible]ma, & Semidifferentia quorumlibet duorum Arcuum, mea[illegible]tionales sunt inter Radium, & Semidifferentiam Sinuum Verſorum eorundem. Fig. 3.

In circulo ZHF. ſint Arcus EP. PC. & EC, duorum ſumma: & ſumpta PY. æquali EP. erit CY. differentia EP. PC. Radius XP. Perpeodicularis eſt EY. (2.l.3.) & BP. Sinus Verſus Arcus EP. cuique CR. Perpendicularis ſit XP. erit PR. Sinus Verſus PC. & BR. vel CT. ipſi parallela erit differentia Sinuum Verſorum BP. PR. quia autem XO. Perpendicularis eſt EC. eam bifariam ſecabit in O. ac pariter Arcum EC. (2.l.3.) Angulus verò EXO. erit Semiſumma Arcuum EP. PC. & EO. Sinus Semiſummæ (l.1.§.8.) atque XK. Perpendicularis CY. Semiſummam bifariam ſecabit, eritq; CK. Sinus Semidifferentiæ CY. dico EO. & CK. medios eſſe inter EX. CL.

42 *Demonſtr.* Anguli EXO. EYC. æquales ſunt, vt pote ſemiſſes Arcus EPC. (3.l.3.) quia verò CO. ſemiſsis eſt CE. vti CK. ſemiſsis CY. erunt EY. OK. parallelæ, (2.l.6.) atque CL. ſemiſsis CT. & Angulus OKC. æqualis EYC. & EXO. (2.l.1.) porrò Anguli EOX. CLK. Recti ſunt: ergo Triãgula XEO. KCL. Æquiangula ſunt (3.l.1.) & latera Homologa proportionalia. (2.l.6.)

Proportio.

Vt	EX.	*Radius.*
ad	EO.	*Sinum Semiſummæ EP. PC.*
ita	CK.	*Sinus Semidifferentiæ inter EP. PC.*
ad	CL.	*Semidifferentiam Sinuum Verſorum BP. PR.*

Coroll. Cuiuſvis Trianguli EGY. circulo inſcripti laterum dimidia OG. GK. media ſunt inter EX. Radium, & GL. dimidium perpendiculi GT.

43 PROPOSITIO II.

In quovis Triangulo Sphærico proportionales ſunt:

Rectangulum Sinuum Integrum
ad *Quadratum Radij.*
vt *Differentia Sinuum* [illegible] *differentia laterum.*
ad *Sinum Verſum Anguli* [illegible]

Sit in *Fig.* 3. Triangulum SZP. in ſuperficie Sphæræ ZHD. Aſſumantur PE. PY. æquales Baſi PS. ſitque ZG. æqualis lateri ZS. & erit PG. differentia laterum ZS. ZP. eius verò Sinus Rectus GR. Sinus autem Verſus RP. cõnexa EY. ſecabitur bifariam in B. (2. l. 3.) atque eſt BP. Sinus Verſus Baſis PS. vel PE. & BR. differentia Sinuum Verſorum BP. RP. cuius ſemiſsis GL. vt antea: at PV. GI. Sinus ſunt laterũ ZP. ZG. & continuato Arcu ZSG. eſt HG. Sinus Verſus Anguli Verticalis SZG. exiſtente Radio XH. & GS. Sinus Verſus eiuſdem Anguli exiſtente Radio GI.

Demonſtratio. VPX. XAI. ſimilia ſunt, item SAB. SGT. (2. l. 6.) & inſuper IAX. SAB. quia Angulus SAB. communis eſt; Anguli verò ad B. ſ. Recti: ergo ASB. AXI. Æquiangula ſunt (3. l. 1.) ergo vniverſa quatuor Triangula SAB. SGT. VPX. IAX. ſimilia ſunt inter ſe, (4. l. 6.) & latera proportionalia. (2. l. 6.)

Vt	CT.	*Chordæ quoque, & Sinus*	*Sinus Verſus*	CS.
ad	CS.	*eiuſdem Anguli in diver-*	*Sinus Verſus*	HG.
ita	PV.	*ſis circulis, proportionales*	*Radius*	CI.
ad	PX.	*ſunt Radij* (5. l. 6.) *ergo.*	*Radius*	XI.

Quia

Quæ verò Rectangula rationem habent compoſitam ex lateribus (1.l.6.) quæ ex lateribus proportionalibus conſtant, erunt etiam proportionalia, atque adeò proportionalia ſunt ſequentia.

Rum	CT. CS.	Et quia CT. CS. & CS.		Rum	CT. CS.
Rum	CS. HG.	HG. eandem habent al-		Rum	CS. HG.
Rum	PV. CI.	titudinem CS. erunt in-		Baſis	CT.
Rum	PX. XH	ter ſeſe Baſes. (1.l.6.)		Baſis	HG.

Ergo per 1.l.5. erunt etiam proportionales.

Rum Sinuum PV. CI. laterum ZP. ZC.
Rum vel Quadratum Radiorum æqualium PX. XH.
CT. Differentia Sinuum Verſ. Baſis, & differentia laterum.
HG. Sinus Verſus Anguli Verticalis SZP.

44 PROPOSITIO III.

In quovis Triangulo Sphærico Sinus unius lateris ad Sequentem 2. alterius eſt, ut differentia Sinuum Verſorum Baſis, & differentia laterum ad Sinum Verſum Anguli Verticalis.

Sit Y. Secás 2. lateris ZC. quia Rum PV CI. ad Qum XH eſt in ratione compoſita PV. ad XH. & CI. ad XH. (1.l.6.) vel XH. ad Y. (5.21.l.1.) Ergo Rum PV. CI. ad Qum XH. eſt vt PV. ad Y. ſed Rum PV. CI. ad Qum XH. eſt vt CT. ad HG. (5.43.) Ergo vt PV. ad Y. ita CT. ad HG. quod &c.

45 PROPOSITIO IV.

In quolibet Triangulo Sphærico proportionalia ſunt.

1. *Rectangulum ex Sinibus laterum includentium Angulum.*
2. *Ad Quadratum Radij.*
3. *Vt Rectangulum ſub Sinibus ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ Baſis, & differentiæ laterum.*
4. *Ad Quadratum Sinus Semianguli Verticalis.*

In

In eadem *Fig.* 3. & Triangulo SZP. concipiantur omnia, quæ antea, & quia PC. est differentia laterum, & PE. PY. æquales existunt Basi PS. erit EC. summa Basis, & differentiæ laterum, & EO. Sinus Semisummæ: CY. verò differentia Basis PY. & differentiæ laterum PC. tum CK. Sinus Semidifferentiæ 2. Consideretur modò Semicirculus FDH. perpendicularis ad planum FZH. & sumpta HD. mensura Anguli PZS. perpendicularis DG. quæ determinat Sinum Versum GH. cadet in G. quare signum G duo refert puncta, alterum in plano, alterum verò in superficie Sphęræ, quod est ipsum D. idem dico de puncto S. iuncta DH. chorda Arcus DH. vel Anguli SZP. bifariam secabitur a perpendiculari XM. (2. l. 3.) & MH. Sinus erit Semianguli SZP. ex lib. 1. *f.* 17. insistat verò MN. ad Angulos Rectos Radio XH. erit HN. semissis HG. veluti HM. rectæ HD. (2. l. 6.) quibus suppositis.

46 *Demonstratio.* Vt CT. ad HG. ita illarum semissa CL. ad HN. (5. l. 5.) ergo quia Rectangulum sub PV. CI. ad Rectangulũ sub PX. HX. est, vt CT. ad HG. ex *f.* 43. & Rectangulum sub CL. HX. est ad Rectangulum sub HN. HX. cum sint sub eadem altitudine, vt Basis CL. ad HN. (1. l. 6.) hoc est vt CT. ad HG. erunt quoq; Rectangula inter se proportionalia. (1. l. 5.)

Rum PV. CI. ad *Qum PX. HX.* vt *Rum CL. HX* ad *Rum HN. HX.*

Qua verò Sinus OC. CK. laterum, medij sunt inter Radium HX. & CL. Semidifferentiam Sinuum Versorum (*f.* 41.) Rectangulũ OC. CK. æquabitur Rectangulo sub CL. HX. (1. l. 6.) Rursus in Triangulo Rectangulo XMH. est HM. media inter HN. HX. (2. l. 6.) & Quadratum HM. æquale Rectãgulo HN. HX. (1. l. 6.) ergo in proportione antecedenti si in locum Rectangulorum sub CL. HX. & sub HN. HX. substituamus ipsis æqualia videlicèt Rectangulum sub OC. CK & Quadratum HM. erunt quoque proportionalia. (1. l. 5.)

Pro-

Proportio ultima.

Rum PV. CI. Sinuum laterum ZP. ZC.
ad Qum PX. HX. Radij, vel Radiorum æqualium.
Rum OC. CK. Sinuum Semisummæ, & Semidifferentiæ 2.
ad Qum HM. HM. Sinus Semianguli Verticalis SZP.

CAPVT SEPTIMVM.

DEMONSTRATIONES SINGVLARES AD Triangula Sphærica.

47 THeoremata sequentia Triangulis Sphæricis resolvendis necessaria non sunt, cũ sufficiant Theoremata, capitum 4. 5. & 6. Illa tamen prætermittere nolui, studiosus enim varietate oblectatur. Habent nonulla specialem conventiam in privatos casus, alia verò operationes facilitores reddunt, vel saltem Mathematicarum fœcunditatem cõfirmant, quæ per tot media diversa metam destinatam attingunt.

48 ## PROPOSITIO I.

Summa Tangentium primarum, vel secundarum duorum Arcuum Quadrante minorum, ita se habet ad differentiam earundem, vt Sinus summæ Arcuum ad Sinum differentiæ earundem. Summa verò primarum ad summam secundarum, vt ad differentiam. Fig. 4.

Sint Arcus GC. GB. illorum differentia CB. sit FGH. perpendicularis ad Radium AG. & GR. æqualis GB. erit RC. summa Arcuum BG. GC. & GD. Tangens GC. & GH. GF. Tangentes Arcuum æqualium GB. GR. ergo HD. est summa Tangentium Arcuum RG. GC. & DF. differentia Tangentiũ GC. GB. & Anguli ad F. H. æquales (5. l. 1.) in Triangulo ADH. latera Sinibus Angulorũ oppositorum proportionalia sunt. (ex lib. 2. §. 10.)

49 *Propertio 1.*

Latus AD.	*Etiam in Triangulo*	*Latus* AD.
Sinus H.	*A D F. proportio-*	*Sinus* F. *vel* H.
Latus DH.	*nales sunt.*	*Latus* DF.
Sinus HAD.		*Sinus* DAF.

Proportio 2.

Ergo (1.l.5.) adinvicem quoque proportionales sunt.

Proportio ultima.

Latus DH. summa Tangentium	*GD.*	*GH.*
Sinus HAD. summa Arcuum	*GC.*	*GR.*
Latus DF. differentia Tangentium	*GF.*	*GD.*
Sinus DAF. differentia Arcuum.	*GC.*	*GB.*

Proportionales etiam sunt alternando, & invertêdo, &c.

Idem demonstratur de Tangentibus 2. collatis cum summa, & differentia complementorum: ergo quia summa complementorum eundem Sinum habet, quem summa Arcuum, cum illorum complementa sint ad Semicirculum, & differentia eadem. (l.1. §.16.) Idem concludetur de Tangentibus 2. quoad summam, & differentiam Arcuum, itemque quoad 3.

50 PROPOSITIO II.

Si Tangentes secundæ, vel primæ laterum Trianguli Sphærici æqualem Angulum comprehendant; Recta Perpendicularis Angulos Verticales efficiet æquales Angulis Perpendiculi Sphærici. Fig.5.

Sit Triangulum Sphæricum B A C. & E F. Tangens 2. A C. & E G. Tangens 2. A B. Angulus verò F E G. æquales B A C. sit E O. perpendicularis, & A D. perpendiculum Sphæricum: Dico Angulos F E O. O E G. æquales esse B A D. D A C. Anguli enim ad O. Recti sunt; Angulus verò ad F. complementum F E O. & ad G. complementum O E G. (3.l.1.) & per 3. prop. §. 37. proportionales sunt.

Pro-

Propartio 1.		*Propartio 2.*
Tangens 2. BA.	& per l.	*Latus EG. Tangens 2. BA.*
Tangens 2. AC.	2. §. 10.	*Latus EF. Tangens 2. AC.*
Sinus 2. BAD.		*Sinus F. qui eſt 2. FEO.*
Sinus 2. DAC.		*Sinus G. qui eſt 2. OEG.*

Ergo exiſtentibus æqualibus Angulis FEG. BAG. æquales quoque ſunt FEO. BAD. & OEG. DAC. idem demonſtrabitur de Tangentibus 1. cum reciprocæ ſunt 2. per lib. 1. §. 27.

31 PROPOSITIO III.

In quocumque Triangulo Sphærico, cuius latera ſunt ejuſdem ſpeciei, Sinus ſummæ laterum, ita ſe habet ad Sinum differentiæ eorundem, ut Tangens 2. Semianguli Verticalis ad Tangentem 1. Semidifferentiæ Angulorum Verticalium, quæ à perpendiculo ſunt. Fig. 5.

In iiſdem Triangulis B A C. F E G. proportionales ſunt.

Propartio 1. per lib. 2. §. 11.	*Propartio 2. §. 48.*
Summa EF. EG. Tang. 2. AC. AB.	*Summa Tang. 2. AC. AB.*
Differentia earundem.	*Differentia earundem.*
Tangens ſemiſsis ſummæ F. & G.	*Sinus ſummæ AC. AB.*
Tangens ſemiſsis differentiæ F. & G	*Sinus earum differentiæ.*

Ergo proportionales quoque ſunt. (1. l. 5.)

Sinus ſummæ Arcuum AC. AB.
Sinus differentiæ AC. AB.
Tangens $\frac{1}{2}$. ſummæ F. & G. quæ eſt 2. $\frac{1}{2}$. FEG. vel $\frac{1}{2}$. EAC.
Tangens $\frac{1}{2}$. differentiæ F. & G. quæ eadem eſt quam FEO. & OEG. (l. 1. §. 16.) vel BAD. DAC. per 2. prop. §. 50.

52 PROPOSITIO IV.

In quolibet Triangulo Sphærico, cuius Anguli supra Basim sunt eiusdem speciei, Sinus summa Angulorum, ad Sinum differentiæ eorundem, est vt Tangens Semibasis ad Tangentem Semidifferentiæ Segmentorum. Fig. 1.

Quia in Polis Trianguli A B C. fit R M O. in quo omnia sunt alterius complementa (§. 14.) sed ex §. 51. proportionales sunt, vt Sinus summæ laterum M R. R P. vel summæ Angulorum C. & B. ad differentiam eorundem: ita Tangens 2. Semianguli N R P. vel N D P. hoc est Tangens 1. Semibasis B C. ad Tangentē Semidifferentiæ Angulorum N R D. D R P. vel Arcuum N D. D P. hoc est B D. D C. Ergo constat propositum, quod, &c.

53 PROPOSITIO V.

Datis tribus lateribus Trianguli Sphærici, vnum latus, & Basim habentis Quadrante minora, datur aliud Triangulum Planum cum æquali Angulo Basi oppositæ. Fig. 6.

Sit Triangulo A B C. Angulus A. latus A B. & Basis opposita B C. & sint Arcus A B. B C. Quadrante minores, productis A B. A C. eò vique secentur Semicirculi in D. erit A D. communis Sectio, & cōcepto plano A H Z. perpendiculari communi Sectioni A D. erit A H Z. perpendiculare planis circulorum D C A. A B D. (3. l. 11.) & A H. A Z. illorum communes Sectiones perpendiculares D A. & Angulus Z A H. planorum inclinatio est (23. P.) ergo æqualis B A C. (§. 4.) ex puncto B. tanquam Polo, Arcu B C. describetur Semicirculus F C E. & quia D B A. transit per eius Polum, erit ipsi perpendicularis (§. 6.) Arcus A E. est summa lateris A B. & Basis B C. & A G. illorum differentia; ductis D E H. D F G.

in

in plano DEHA. & DCZ. in plano DCZA. connectantur AE. FE.

Demonstratio. Cum AE. perpendicularis sit DH. (3. l. 3.) Anguli DAE DHA. æquales erunt (3. l. 6.) DAE. DFE. æquales sunt; insistũt enim eidẽ Arcui DE. (3. l. 3.) ergo DFE. DHG. æquantur, cum verò GDH. communis sit, æquales quoque erunt DGH. DEF. (3. l. 1.) divisa GH. bifariam in X. & descripto Semicirculo GZH. qui plana GZH. FCE. perpendicularia existunt DHG. & Sectiones FE. GH. subcontrariæ; Recta DZ. secabit circulum EGF. in C. vbi secatur à plano DCA. (5. p. l. 11. Appollonis) Angulus ADE. semissis est AE. summæ laterum AB. & Basis BC. (3. l. 3.) & FD A semissis AG. eorundem differentiæ, CAD. verò semissis lateris AC. & quia HA. ZA. perpendiculares sunt Diametro communi AD. erit AH. Tangens Semisummæ, & AG. Tangens Semidifferentiæ, & AZ. Tangens Semilateris AC. & GH. differentia Tangentium, at GX. XZ. XH. Semidifferentia Tangentium, Semidifferentia autem cum parte minori AG. Semisummam AX. conficit (l. 2. §. 12.) ergo in Triangulo Plano cognita sunt tria latera, AZ. Tangens Semilateris maioris; AC. & AX. Semisumma Tangentium Semisummæ, & Semidifferentiæ Basis, & lateris minoris: & demum XZ. Semidifferentia earundem Tangentium; Angulus verò XAZ. æqualis est Sphærico CAB.

ergo constat propositum,

&c.

54 PROPOSITIO VI.

In quocunque Triangulo Sphærico habente duo latera Quadrante minora, Tangens Semibasis, ita se habet ad Tangentem Semisummæ laterum, vt Tangens Semidifferentiæ laterum ad Tangentem Semidifferentiæ Segmentorum Basis. Fig. 6.

Sit Triangulum ABC. latera AB, BC. Quadrante minora, & AC. Basis: reliqua omnia vt in 5. prop. acta Recta DOR. secabit Semicirculum GZH. in R. vbi secatur à communi Sectione AZ. eritque AR. Tangens ADR. semissis differentiæ Segmentorum A O. nam cum BOC. Isosceles sit, perpendiculum BI. secabit æquales IC. OI. (§. 10.) Segmenta Basis sunt AI. IC. quare AO. differentia est Segmentorum, quibus suppositis, Rectæ AH. AZ. circulum GZH. secant: ergo proportionales sunt (6. l. 6.)

Proportio.

AZ.	*Tangens Semibasis*	AC.
AH.	*Tangens Semisumma*	AE.
AG.	*Tangens Semidifferentia laterum,*	AP.
AR.	*Tangens Semidifferentiæ Segmentorum,*	AO.

Et etiam alternando, & invertendo, &c.

Neperus hac proportione Trigonometriam ditavit.

55 PROPOSITIO VII.

In Triangulo Rectangulo si Hypothenusa, & perpendiculum minores Quadrante existant, Tangens Semibasis media erit inter Tangentes Semisummæ, & Semidifferentiæ Hypothenusæ, & perpendiculi. Fig. 6.

Consectarium est antecedentis: perpendiculum enim cadit in extremum Basis, & Basis tota differentia est Segmentorum: ergo vt Tangens Semibasis ad Tangentem Semisummæ Hypothenusæ, & perpendiculi, ita Tangens Semidifferentiæ ad Tangentem Semidifferentiæ Segmentorum, quæ eadem est Semibasis.

CA-

CAPVT OCTAVVM.

RESOLVTIO TRIANGVLI SPHERICI Rectanguli.

56 ANgulus Rectus ſupponitur perpetuò notus, reliqua verò data, vel quæſita lineola, vel punctis denotantur, vti in Trigonometria Plana. Maioris perſpicuitatis gratia, termini Trianguli hunc ordinem ſervabunt. 1. Hypothenuſa. 2. Latus conterminum. 3. Latus oppoſitum. 4. Angulus conterminus. 5. Angulus oppoſitus. Datis iuxta ordinem 1. & 2. tùm 1. & 3. &c. exquiruntur quoque ſecundum ordinem reliqui.

57 In omni proportione diſponuntur termini, vt in Trigonometria Plana, & pro primo Logarithmo eius complementum aſſumitur, trium autem ſumma multata Radio quartum exhibet. Radius demitur vnitate ad ſiniſtram in additione omiſſa, vti monuimus *lib. 1. §. 119.* Ita vt ſi omnes tres termini addantur, ſemper ad ſiniſtram ante punctum characteriſticam dividens; proveniet duæ litteræ, quarum prima, ſi futura ſit vnitas, non oportet ſcribi: ſi verò futura ſit 2. apponitur 1. plus enim aſcendere nequit, auferre tamen hanc vnitatem, idem eſt ac demere Radium. Quando Logarithmus ſit Tangentis Radio maioris, ſumetur complementum vſque ad duplum Radium, & detrehentur 2. ex ſumma, quod dupli Radij ſubtractioni æquivalet. Hoc monitum in poſterum retinere operæ pretium erit.

58 Omnes reſolutiones à *Fig.* 1. promanare debent, & in qualibet duo Triangula conſtituuntur cum Angulo communi BEH. DEG. latera HB. GD. Angulo communi oppoſita perpendicula ſunt, latera verò inter Angulum communem, & Rectum Baſes exiſtunt EH. EG. Arcus oppoſiti Angulo Recto ſunt Hypothe-

 nu-

nuſæ EB. ED. idemeſt in Triangulis DEG. CEI. itavt Triangulum alterum, veluti DEG. Hypothenuſam, & Baſim habeat ſemper Quadrantes, vti DE. GE. quod principale voco, alterum verò proportionale, ſive minus ſit veluti EBH, ſive mains vt CEI.

59 Quoties in Triangulo proportionali nota eſt, vel quæſita Hypothenuſa, ratio erit Sinus ad Sinum per §. 29. Si verò Hypothenuſa in proportione non inſit, Baſis autem Trianguli proportionalis nota ſit, ratio erit Sinus ad Tangentem, at ſi Baſis ignota exiſtat, ratio erit Tangentis ad Sinum per §. 31. & tandem ratio incipere ſemper debet à Triangulo in quo binæ res cognitæ dantur, Hypothenuſa, & Perpendiculum, vel Baſis, & Perpendiculum, atque etiam prima ſit oportet eiuſdem ſpeeici cum termino cognito alterius Trianguli.

60 Quatuor ſunt Triangula principalia cum ſuis proportionalibus, primum DEG. BEH. ſecundum HAG. BAD. tertium QBP. ABD. quartum DRP. ARQ. Si in primo terminos haud reperiam ſufficientes reſolutioni, tranſibo ad ſecundum, vel tertium, vel quartum, in quorum vno offendentur, conſideratis lateribus, & menſuris Angulorum cum ſuis complementis, vt in Triangulo BEH. eſt BD. complementum EB. & HG. complementum EH. & BA. complementum BH. DG. verò menſura Anguli BEH. & DA. ipſius complementum, &c.

Iſta rectius percipientur in ipſa praxi ad ſolutionem ſequentium Problematum adhibita.

61 PROBLEMA I.

Data Hypothenusa, & altero latere.

1. *Invenire reliquum latus.*
2. *Angulum conterminum.*
3. *Angulum oppositum.*

I. *INVENIRE RELIQVVM LATVS.* Fig. 1.

IN Triangulo B E H. datur Hypothenusa E B. 50. *grad.* 20. *m.* & latus H B. 30. *gr.* 25. *min.* inquiritur reliquum latus E H. vel eius complementum H G. quia B D. complementum est Hypothenusæ E B. & B A. complementum perpendiculi B H. in Triangulis A B D. A H G. sufficientes terminos habeo per §. 29. vt Sinus novæ Hypothenusæ A B. ad Sinum Quadrantis A H. ita Sinus perpendiculi B D. ad Sinum perpendiculi H G. ergo respectu habito ad Triangulum E B H. ordinabitur sequens proportio.

Proportio.		*Gradus.*	*Logarithmi.*
A B.	*Sinus 2. perp. B H.*	30. 25. *m.*	C L. 0,0643082
A H.	*Sinus totus, vel Radius.*	90. 00. *m.*	10,0000000
B D.	*Sin. 2. Hypothenusæ E B.*	50. 20. *m.*	9,8050385
H G.	*Sinus 2. Basis E H.*	42. 15. *m.*	9,8693467

62 II. *INVENIRE ANGVLVM CONTERMINVM.*

In eodem Triangulo B E H. datis Hypothenusa E B. & latere B H. quæritur Angulus E B H. conterminus lateri B H. eius mensura est P Q. complementum verò Q R. & quoniam H A. B Q. E D. B P. Quadrantes existunt; est A Q. æqualis B H. & D P. E B. ergo in Triangulis R P D. R Q A. proportionales sunt per §. 31. Sinus Basis R Q. ad Tangentem perpendiculi Q A.

vt Sinus totus R P. ad Tangentem P D. & respectu Trianguli E B H. invertendo.

Proportio §. 31.		*Gradus.*	*Logarithmi.*
D P. *Tangens Hypoth.*	E B.	50. 20. *m.* CL.	9.9184198
A Q. *Tangens Perpend.*	B H.	30. 25. *m.*	9.7687029
P R. *Sinus totus, vel Radius.*		90. 00. *m.*	10.0000000
Q R. *Sinus* 2. *Q P. vel Ang.*	E B H.	60. 53. *m.*	9.6871227

Ablatus est numerus binarius 2. ex summa, quia complementum Logarithmicum assumptum est ad duplum Radium, §. 57.

III. REPERIRE ANGVLVM OPPOSITVM.

63 In eodem Triangulo E B H. datis E B. B H. quæritur Angulus B E H. lateri B H. oppositus: mensura Anguli est D G. itaque in Triangulis E B H. E D G. proportionem habemus.

Proportio §. 29.		*Gradus.*	*Logarithmi.*
Sinus Hypoth.	E B.	50. 20. *m.* CL.	0.1136384
Sinus Perpend.	B H.	30. 25. *m.*	9.7043947
Sin. totus, vel Rad.	E D.	90. 0. *m.*	10.0000000
Sinus D G. Anguli.	B E H.	41. 7. *m.*	9.8180331

64 Eadem operatio fit quãdo partes datæ Quadrante maiores existunt, habẽt enim eosdem Sinus, & Tangentes, quam minores, veluti si Triangulum sit B F X. Angulus ad X. Rectus, Hypothemusa B F. 129. 40. latus B X. 149. 35. disponentur termini.

Proportio §. 29.		*Gradus.*	*Logarithmi.*
Sinus Hypoth.	B F.	129. 40. *m.* CL.	0.1136384
Sinus Perpendiculi.	B X.	149. 35. *m.*	9.7043947
Sin. totus, vel Rad.	F D.	90. 0. *m.*	10.0000000
Sinus D V. Anguli.	B F X.	138. 53. *m.*	9.8180331

Sumitur Angulus Obtusus, vt latus oppositum, §. 19.

PRO-

65 PROBLEMA II.

Data Hypothenusa, & Angulo vno.

1. *Reperire latus conterminum.*
2. *Latus Angulo oppositum.*
3. *Reliquum Angulum.*

I. INVENIRE LATVS CONTERMINVM.

In Triangulo EBH. datur Hypothennsa EB. 65. *m.* 45. & Angulus EBH. 61. *m.* 35. inuestigatur latus BH. Angulo dato conterminum. In Triangulis R D P. R A Q. cum E D. B P. H A. B Q. Quadrantes existant, erit D P. æqualis Hypothenusæ B B. & A Q. perpendiculo B H. & R Q. complemento Q P. mensuræ E B H. ergo per cap. 4. §. 31. proportionales sunt. Sinus totus R P. ad Sinum R Q. vt Tengens D P. ad Tangentem A Q. & quoad Triangulum E B H. est.

Proportio §. 31.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
Sinus totus, vel Rad. RP.	90.00. CL.	0.0000000
Sinus 2. EBH. qui est RQ.	61.35.	9.6774975
Tang. Hypoth. DP. vel EB.	63.45.	10.3070250
Tang. lateris AQ. vel BH.	43.59.	9.9845225

66. *II. INVENIRE LATVS OPPOSITVM.*

In Triangulo BEH. datur Hypothennsa EB. 52. 33. Angulus B E H. 40 58. quæritur latus oppositum B H. in Triangulis E D G. E D H. invenitur proportio cap. 4. §. 29.

Proportio §. 29.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
Sinus totus, vel Rad. ED.	90. 0. CL	0.0000000
Sinus DG Anguli BEH.	40.58.	9.8166521
Sinus Hypoth. EB.	52.33.	9.8997572
Sinus lateris oppos. BH.	31.22.	9.7164093

67 *III. INVENIRE RELIQVVM ANGVLVM.*

In Triangulo EBH. datis Hypothenusa EB. 63. 45. Angulo EBH. 61. 35. exquiritur reliquus Angulus BEH. proportio invenietur in Triangulis BPQ. BDA.

Proportio §. 31.			*Logarithmi.*
EP. Sinus totus		90. 0.	CL. 0.0000000
BD. Sinus 2. Hypoth.	*EB.*	63. 45.	9.6457058
PQ. Tangens Anguli	*EBH.*	61. 35.	10.2667433
DA Tang. 2. GD. vel Ang. BEH.		50. 44.	9.9124491

68 PROBLEMA III.

Datis duobus lateribus.

1. *Invenire Hypothenusam.*

2. *Quemlibet Angulum.*

I. REPERIRE HYPOTHENVSAM.

In Triangulo BEH. dantur latus EH. 59. 22. latus verò HB. 33. 44. quæritur Hypothenusa EB. in Triangulis AHG. ABD. invenietur proportio.

Proportio.		*Gradus.*	*Logarithmi.*
AH Sinus totus		90. 00.	CL. 0.0000000
AB. Sinus 2. lateris	*BH.*	33. 44.	9.9199307
HG. Sinus 2. lateris	*EH.*	59. 22.	9.7071801
BD. Sinus 2. Hypoth.	*EB.*	64. 56.	9.6271108

69 *II. INVENIRE QVEMLIBET ANGVLVM.*

Datis iisdem investigatur Angulus BEH. oppositus BH. ratio reperitur in Triangulis EDG. EBH.

Proportio §. 31.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
Sinus EH. lateris conterm.	59. 22.	CL. 0.0652765
Sinus totus EG.	90. 00.	10.0000000
Tangens HB. lateris oppositi	33. 44.	9.8246190
Tangens GD. Ang HEB.	37. 49.	9.8898955

Pro Angulo EBH. vt Sinus BH. ad Sinum totum, sic Tangens lateris oppositi HE. ad Tangentē Anguli EBH

PRO-

70 PROBLEMA IV.

Dato vno latere, & Angulo cotermino.

1. *Invenire Hypothenusam.*
2. *Latus oppositum.*
3. *Reliquum Angulum.*

I. INVENIRE HYPOTHENVSAM.

Latus EH. sit 67. 51. Angulus conterminus BEH. 28. 22. quæritur Hypothenusa EB. reperietur in Triangulis AHG. ABD.

Proportio §. 31.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
AG. Sinus totus, vel Radius.	90. 00.	CL.	0.0000000
AD. Sin. 2. GD. vel Ang. BEH.	28. 22.		9.9444457
GH Tangens 2. lateris EH.	67. 51.		9.6096742
DB. Tangens 2. Hypoth. EB.	70. 18.		9.5541199

71 II. INVENIRE LATVS OPPOSITVM.

Datis ijsdem indagatur HB. in Triangulis EGD. EHB.

Proportio §. 31.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
EG. Sinus totus	90. 00.	CL.	0.0000000
EH Sinus lateris conterm.	67. 51.		9.9667047
DG. Tangens Anguli BEH.	28. 22.		9.7323506
HB. Tangens lateris oppositi	26. 34.		9.6990553

72 III. INVENIRE RELIQVVM ANGVLVM.

Datis latere HB. 37. 21. Angulo contermino HBE. 72. 25. indagatur reliquus Angulus BEH. in Triangulis BQP. BAD. reperietur proportio, cap. 4. p. 1. §. 29.

Proportio §. 29.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
BQ. Sinus totus	90. 00.	CL.	0.0000000
BA. Sinus 2. lateris BH.	37. 21.		9.9003367
QP. Sinus Anguli EBH.	72. 25.		9.9792198
AD. Sin. 2. DG. vel BEH.	40. 44.		9.8795565

73 PROBLEMA V.

Dato vno latere, & Angulo oppoſito.

1. *Invenire Hypothenuſam,*
2. *Reliquum latus.*
3. *Reliquum Angulum.*

I. INVENIRE HYPOTHENVSAM.

In Triangulo EBH, datur Angulus B E H. 32. 54. latus oppoſitum H B. 23. 17. quæritur Hypothenuſa E B. ratio invenietur in Trianguli s E D G, E B H. §. 29.

Proportio §. 29.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
D G. Sinus Anguli B E H,	32. 54.	CL. 0. 2650607.
H B. Sinus lateris dati	23. 17.	9. 5969029.
D E. Sinus totus	90. 00.	10. 0000000
B E. Sinus Hypothenuſæ.	46. 42.	9. 8619636.

74 ### II. INVENIRE RELIQVVM LATVS,

Datis iiſdem inveſtigatur H E. in Triangulis E D G. E B H.

Proportio §. 31.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
D G. Tangens Anguli B E H.	32. 54.	CL. 9. 1891433
B H. Tangens lateris oppoſ.	23. 17.	9. 6337948
E G. Sinus totus, vel Radius	90. 00.	10. 0000000
E H. Sinus alterius lateris	41. 42.	9. 8229381

75 ### III. INVENIRE RELIQVVM ANGVLVM.

Datis iiſdem indagatur Angulus E B H. in B Q P. B A D.

Proportio §. 29.	*Gradus*	*Logarithmi.*
B A. Sinus 2. lateris B H.	23. 17.	CL. 0. 0368918.
B Q. Sinus totus, vel Radius	90. 00.	10. 0000000
A D. Sinus 2. D G vel B E H.	32. 54.	9. 9240827
Q P. Sinus 1. Q P. vel E B H.	66. 4.	9. 9609745

PRO-

76 PROBLEMA VI.
Datis duobus Angulis.

1. *Invenire Hypothenusam.*
2. *Invenire quodlibet latus.*

I. INVENIRE HYPOTHENVSAM.

Datis BEH. & EBH. quæritur EB. in BQP. BAD.

Proportio §. 31.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
QP. Tangens Anguli EBH.	60. 18.	CL.	9.7561718
AD. Tangens 2. Anguli BEH.	45.30.		9.9924197
BP. Sinus totus, vel Radius.	90.00.		10.0000000
BD. Sinus 2. Hypothenuſ. EB.	55.54.		9.7485915

Ex quolibet Angulo ſumi poteſt Tangens 1. & ex reliquo 2. vti videre eſt in Triangulis EDG. FPO.

Proportio §. 31.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
DG. Tangens 1. Anguli BEH.	45.30.	CL.	9.9924197
PO. Tang. 2 PQ vel Ang. EBH.	60.18.		9.7561718
DF. Sinus totus, vel Radius.	90.00.		10.0000000
PF. Sin. 2. DP. vel Hypoth. EB.	55.54.		9.7485915

77 *II. INVENIRE QVODLIBET LATVS.*

Datis iiſdem, quæritur BH. in Triangulis BQP. BAD.

Proportio §. 29.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
QP. Sinus Anguli contenti. EBH.	60.18.	CL.	0.061.645
AD. Sinus 2. Anguli oppoſiti BEH.	45.30.		9.8456618
BQ. Sinus totus, vel Radius	90.00.		10.0000000
BA. Sinus 2. Interni EH.	36.12.		9.9068263

Et EH. in Triangulis FGD. FOP.

Proportio §. 29.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
GD. Sinus Anguli contenti. BEH.	45.30.	CL.	0.1467579
OP. Sin. 2. Ang. opp. PQ. vel EBH.	60.18.		9.8595074
GF. Sinus totus, vel Radius	90.00.		10.0000000
OF. Sinus 2. OG qui eſt EH.	46.00.		9.8417653

78 PROBLEMA VII.
De Triangulis Quadrantalibus.

Triangulum Quadrantale est, quod vnum latus Quadrantem habet *gr.* 90. neque Rectangulum est, resolvitur tamen, vt Rectangula commutatis lateribus in Angulos, & Angulis in latera, cum enim in Polis efficiatur aliud, cuius Anguli complementa sunt laterum, latera verò Angulorum, *§.* 15. prodit Triangulum vnum Rectangulum, & quia complementa ad Semicirculum eosdem Sinus, & Tangentes habent; sufficit latera in Angulos convertere, & Angulos in latera. Sit pro exemplo Triangulum EBA. sitque EB. 55. 54. BA. verò 53. 48. & EA. Quadrans 90. 0. [illegible] Angulus EAB. maiori lateri oppositus: permutatis [illegible] bus in Angulos; suppono maius latus exquiri, vti in operatione præcedenti.

Proportio.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
Sinus BA. lateris conterm.	53.48.	CL.	0.0931478
Sinus 2. BE. lateris oppos.	55.54.		9.7486833
Radius	90.00.		10.0000000
Sinus 2. Anguli EAB.	46.00.		9.8418311

79 *Observationes generales.*

In eformatione Rectangulorum observetur, in Angulis Acutis duo simul maiores semper esse *gr.* 90. Obtusos verò 180. minores. Vnumquodque latus Angulo Acuto, sibi opposito minus; Obtuso verò opposito maius. Latera sequi speciem Angulorum oppositorum, Hypothenusam minorem Quadrante existere, si Anguli Obliqui eiusdem speciei sint, maiorem tamen si diversæ. Observentur partes, quæ Obtusæ, vel Acutæ prodire debent; maximè in Quadrantalibus, facta commutatione laterum in Angulos, & Angulorum in latera solvantur Quadrantalia per Problema ad quod pertinent, veluti Rectangula.

CA-

CAPVT NONVM.

RESOLVTIO OBLIQVANGVLORVM Sphæricorum.

80 PRoblemata Obliquangula sunt sex, ad tres species revocata.

Species 1. Datis tribus partibus alternis invenire reliquas.
Species 2. Datis duabus partibus alternis cum intermedia.
Species 3. Datis duabus partibus alternis cum una opposita.

Prima species vnicum habet Problema, secunda duo, tertia verò tria, quæ omnia sex conficiunt. Partes alternas voco, quæ vnam intermediam habent, velut latera, quæ vnum Angulum habent intermedium; & Anguli, quibus intermedium est vnum latus: quare datæ partes alternæ latera, vel Anguli esse possunt.

SPECIES PRIMA.

PROBLEMA I.

Datis tribus partibus alternis.

Invenire quamlibet partem oppositam.

I. Datis tribus lateribus. Reperire quemlibet Angulum.

81 In Triangulo A B C. notis tribus lateribus, indagatur Angulus B A C. praxis oritur ex §. 45. dispositio eadem quàm *lib.* 1. §. 37. atque optimum præceptum est.

Dispositio practica.	Gradus.	*Logarithmi.*
1. *AB. Latus maius includens,*	55.30.	CL. 0.0842062
2. *AC. Latus minus includens,*	54.19.	CL. 0.0903085
3. *Differentia laterum.*	1.11.	
4. *BC. Latus oppositum Angulo*	40.10.	
5. *Summa* 3. & 4.	41.21.	
6. *Differentia* 3. & 4.	38.59.	
7. *Semissumma semissis* 5.	20.40½.	9.5479125
8. *Semidifferentia semissis* 6.	19.29½.	9.5233168
9. *Summa* 4. *Logarithmorum.*		19.2455440
10. *Eius semissis Sinus est.*	24.48½.	9.6227720
11. *Arcus duplus est Ang. B A C.*	49.37.	

D 4

82 DATIS TRIBVS ANGVLIS.

Invenire quodlibet latus.

In Triangulo ABC. notis tribus Angulis ad A. B. C. inveſtigatur latus BC. ſummatur complementum ad Semicirculum quorumlibet duorum Angulorum includentium, in cæteris eodem modo operandum eſt in §. 81.

Diſpoſitio.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
1. *Complementum Ang. ACB.*	103. 20. CL.	0.0118671
2. *Angulus conterminus ABC.*	73. 33. CL.	0.0181509
3. *Differentia 1. & 2.*	29. 47.	
4. *Angul. CAB. lateri oppoſitus*	49. 40.	
5. *Summa 3. & 4.*	79. 27	
6. *Differentia 3. & 4.*	19. 53.	
7. *Semiſumma ſemiſsis 5.*	39. 43$\frac{1}{2}$.	9.8055712
8. *Semidifferentia ſemiſsis 6.*	9. 56$\frac{1}{2}$.	9.2371551
9. *Summa 4. Logarithm.*		19.0727443
10. *Eius ſemiſsis eſt Sinus*	20. 6$\frac{1}{2}$.	9.5363721
11. *Eius duplum eſt latus BC.*	40. 13.	

83 Ratio praxis eſt, quia ſunt proportionalia, §. 45.

Rect. Sinuum later.	*AB.*	55. 30.	9.9159938
	AC.	54. 19.	9.9096915
Quadratum Rady			2.0000000
Rect. ang. Sinuum	*Semiſum.*	20. 40$\frac{1}{2}$.	9.5479125
	Semidiff.	19. 29$\frac{1}{2}$.	9.5233168
Quadratum Sinus Semianguli			19.2455440

Si ergo Logarithmi 3. 4. 5. in vnam ſummam colligantur, & abipſis auferatur Logarithmorum 1. & 2. ſumma: remanebit Logarithmus Quadrati Sinus Semianguli, ex *lib.* 1. §. 118. ergo ex §. 119. Si ſummantur complementa Lo-

Logarithmica 1. & 2. ſumma 1. 2. 3. 4. §. minus duplo Radio, quia duo complementa ad Radium ſumpta ſunt, dabit Logarithmum ſextum: cum ergo in praxi præcedenti duplus Radius, qui auferendus erat, omniſſus ſit, ſumma quatuor priorum dat Logarithmum Quadrati quæſitum: & illius dimidium erit Logarithmus Radicis quadratæ, ex §. 123. *lib.* 1.

84 *ALITER EX NEPERO, §. 54.*

1. *Baſis BC opp. Ang. A.*	40.10.	*Datis 3. lateribus AB. AC. CB. quæritur Angulus B.*
2. *Latus AB.*	55.30.	
3. *Latus AC.*	54.19.	
4. *Summa 2. & 3.*	109.49.	
5. *Differentia 2. & 3.*	1.11.	*Logarithmi*
6. *Semiſsis 1. Tangens.*	20. 5.	CL. 0.4369721
7. *Semiſsis 4. Tangens.*	54.54$\frac{1}{2}$.	10.1532960
8. *Semiſsis 5. Tangens.*	0.35$\frac{1}{2}$.	8.0139699
9. *Semidiffer. Segm. Tang.*	2.18.	8.6042380
10 *Summa 6. & 9. eſt BD.*	22.23.	*Segm. maius.*

Tandem in Triangulo ABD. invenietur Ang. ABD. 73.33. ex §. 62. Hæc praxis exigit, vt Semiſumma ſit Quadrante minor ex demonſtratis, §. 54.

SPECIES SECVNDA.

PROBLEMA II.

Datis duabus partibus alternis cum intermedia.

Invenire reliquam alternam.

85 Problema iſtud, & inſuper tria ſequentia binas operationes poſcunt, prima pertinet ad Segmentum Baſis, vel Anguli Verticalis.

In Triangulo BAC. perpendicularis ſemper procidere debet ab vno latere noto AC. in alterum CB. itaut ambo notum Angulũ includant ACB. quo in Rectangulo ACD

præter Angulum Rectum ad D. binæ tes innotescant, Hypothenusa AC. & Angulus ACD.

Pro Segmento DC. §. 65.

			Logarithmi.
Sinus totus.	90.00.	CL.	0.0000000
Sinus 2. Anguli ACD.	76.40.		9.3628892
Tangens lateris AC.	54.19.		10.1437958
Tangens Segment. CD.	17.48.		9.5066850

Pro Angulo CAD. §. 67.

Sinus totus.	90.00.	CL.	0.0000000
Sinus 2. lateris AC.	54.19.		9.7658956
Tangens Anguli ACB.	76.40.		10.6252436
Tangens 2. Ang. CAD.	22. 7.		10.3911392

Si AC. gr. 90. maior extiterit erunt CD. & CAD. 90. maiores, modò Angulus ACD. Acutus sit, minores verò si fuerit Obtusus.

I. DATIS 2. LATERIBVS, ET ANGVLO MEDIO.

86 *Invenire reliquum latus.*

In Triangulo ABC. notis CA. CB. & Angulo ACB. quæritur latus AB. 1. Reperitur CD. per §. 85.

Segm. inventum CD. est	17.48.	*Si Perpendicul ä intra*
In Triangul. ABC. est BC.	40.12.	*cadat auferetur semper; si verò extra adderur. si Angulus datus sit Obtusus ACB.*
Differentia CD. B& est BD.	22.24.	
Segment. inventum CD. est	17.48.	
In Triangulo AbC. est bC.	4.36.	*demeturverò si sit Acutus.*
Summa Cb. CD. est Db.	22.24.	

Ergo invenitur latus AB.

II. Operatio §. 38.

			Logarithmi.
Sinus 2. Segment. DC.	17.48.	CL.	0.0213040
Sinus 2. Segm. DB. vel Db.	22.24.		9.9659285
Sinus 2. lateris AC.	54.19.		9.7658956
Sinus 2. lateris AB.	55.30.		9.7531281

Latus AB. sequitur speciem Segmenti Db. vel BD.

Re-

87 *Regulæ ad Perpendiculum spectantes.*

Si Anguli ad B. C. eiusdem speciei sint, cadet intra, si verò diversæ extra, quia autem de specie Angulorũ haud semper constat, has regulas servare oportet.

Regula 1. Si Angulus notus ad C. Acutus sit, latera verò *gr.* 90. minora, vel alterum plus, alterum minus, & demittatur perpendiculum in latus maius cadet intra; si tamen latera singula *gr.* 90. maiora existant, cadet in minus extra.

Regula 2. Si Angulus notus ad C. Obtusus sit, latera verò *gr.* 90. minora, vel alterum plus, alterum minus, cadet in maius extra: si autem maiora cadet intra. In *Fig.* 1. reperientur Triangula omnium specierum, cuius meditatio omnibus præceptis erit præstantior.

II. DATIS DVOBVS ANGVLIS, ET LATERE MEDIO.

88 *Invenire reliquum latus.*

In Triangulo ABC. cognitis Angulis CAB. BCA. & latere AC, investigatur AB C. 1. Repertetur Angulus CAD. §. 85.

Angulus CAD. inventus est 22. 7.
In Triãg. BAC est Ang. BAC 49. 40.
Diff. BAC. CAD. est DAB. 27. 33.

Si Perpendiculum cadat intra, demetur semper; si verò extra addetur, si tamen Angulus datus ACb. Obtusus existat: auferetur verò, si Acutus sit.

Angulus inventus CAD. est 22. 7.
In Triang. CAb. est Ang. CAb. 5. 26.
Summa CAb. CAD. est DAb. 27. 33.

Ergo invenietur Angulus ABC.

II. Operatio §. 36.	*Gradus.*		*Logarithmi.*
Sinus Segmenti CAD.	22. 07.	CL.	0.4242422
Sinus Segm. bAD. vel BAD.	27. 33.		9.6651328
Sinus 2. Ang. ACB. vel ACb.	76. 40.		9.3628892
Sinus 2. Ang. ABC. vel AbC.	73. 33.		9.4522642

Angulus ABC. sequitur speciem BAD.

PROBLEMA III.

Datis duabus partibus alternis cum intermedia. *Invenire quamlibet oppositarum.*

I. DATIS 2. LATERIBVS, ET ANGVLO MEDIO.

89 *Invenire quemlibet Angulorum.*

Perpendicularis cadit ab Angulo ignoto, qui non quæritur, CA. CB. & BCA. datæ sunt, investigatur Angulus ABC. 1. Reperietur Segmentum CD. per §. 85. & est 17. 48.

Segmentum CD. inventum est	17. 48.	*Additio, vel*
In Triang. ABC. est latus BC.	40. 12.	*subtractio fit*
Differ. CD. BC. est BD.	22. 24.	*uti in §. 86.*
In Triangulo AbC. latus Cb.	4. 6.	
Summa CD. Cb. est Db.	22. 24.	

Ergo reperietur Angulus ABC. vel AbC.

II. Operatio §. 39.	*Gradus*	*Logarithmi.*
Sinus Segmentis CD.	17. 48. CL.	0. 5147113
Sinus Segmentis Db. vel BD.	22. 24.	9. 5810052
Tangens 2. Ang ACB. vel ACb.	76. 40.	9. 3747563
Tangens 2. Ang. ABC. vel AbC.	73. 33.	9. 4704728

II. DATIS 2. ANGVLIS, ET LATERE MEDIO.

Invenire quodlibet latus oppositum.

90 Perpendicularis cadit in latus ignotum, quod nō quæritur CAB. BCA. AC. datæ sunt investigatur latus AB. 1. Reperietur Angulus CAD. §. 85. & DAb. vel BAD. §. 88.

II. Operatio §. 36.		*Logarithmi.*
Sinus 2. Anguli CAD.	22. 7. CL.	0. 0331924
Sinus 2. Anguli DAb. vel BAD.	27. 33.	9. 9477314
Tangens 2. lateris AC.	54. 19.	9. 8562042
Tangens 2. lateris AB.	55. 30½	9. 8371280

SPE-

SPECIES TERTIA.

PROBLEMA IV.

Datis duabus partibus alternis, & vna oppoſita.

Invenire reliquam partem alternam.

I. DATIS DVOBVS LATERIBVS, ET ALTERO Angulo oppoſito.

Invenire reliquum latus.

91 Cognitis CA. BA. ECA. quæritur BC. perpendicularis cadit in latus quæſitum. 1. Reperietur CD. §. 85 quæ eſt 17. 48. *m.* mox *Db.* vel BD.

II. Operatio §. 58.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
Sinus 2. lateris AC.	54. 19. CL.	0.2341043
Sinus 2. lateris AB.	55. 30.	9.7531280
Sinus 2. Segm. CD.	17. 48.	9.9786959
Sinus 2. Segm. Db. vel BD.	22. 24.	9.9659282
Summa CD. BD. eſt BC.	40. 12. *in ABC.*	
Differen. CD. Db. eſt Cb.	4. 36. *in ACb.*	

Additio, vel ſubtractio, fit vt in §. 86. Segmentum BD. ſequitur ſpeciem lateris contermini AB.

II. DATIS DVOBVS ANGVLIS, ET VNO latere oppoſito.

Invenire reliquum Angulum.

92 Notit AC. CBA. ACB. quæritur BAC. perpendicularis cadit ab Angulo quæſito. 1. Reperietur Angulus CAD. §. 85. qui eſt 22. 7. *m.* moxque DAb. vel BAD.

II. Operatio §. 36.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
Sinus 2. Anguli ACB.	36. 40. CL.	0.6371108
Sinus 2. Ang. ABC. vel Ab C.	73. 33.	9.4520602
Sinus Anguli CAD.	22. 7.	9.3757577
Sinus Ang. DAb. vel BAD.	27. 33.	9.6649287
Sum. CAD. & DAB. eſt BAC.	49. 40. *in ABC.*	
Differ. CAD. & DAb. eſt CAb.	5. 26. *in ACb.*	

Additio, vel ſubtractio ſit vti in §. 88. Angulus DAB. ſequitur ſpeciem Segmenti BD.

PRO-

PROBLEMA V.

Datis duabus partibus alternis, & vna oppoſita,
Inuenire intermedium.

I. DATIS DVOBVS LATERIBVS, ET Angulo oppoſito.

Inuenire Angulum intermedium.

93 Cognitis CA. AB. BCA. quæritur BAC. perpendicularis cadit ab Angulo quæſito. 1. Repetietur CAD. §. 85.

II. Operatio §. 37.		*Logarithmi.*
Tangens 2. lateris AC.	54.19.	CL. 0.1437957
Tangens 2. lateris AB.	55.30.	9.8374343
Sinus 2. Anguli CAD.	22. 7.	9.9668075
Sinus 2. Anguli DAb. vel BAD.	27.33.	9.9477375

Summa DAC. BAD eſt BAC. 49.40. *in ABC.*
Differ. CAD. DAb eſt CAb. 5.26. *in ACb.*

Additio, vel ſubtractio, fit vt in §. antecedenti, vel §. 88.

II. DATIS DVOBVS ANGVLIS, ET VNO latere oppoſito.

Inuenire latus intermedium.

94 Cognitis CBA. ACB. AC. quæritur BC. perpendicularis cadit in latus quæſitum. 1. Repetietur Segmentum DC. §. 89.

II Operatio §. 39.	*Gradus.*	*Logarithmi.*
Tang. 2. Ang ACB. vel ACb.	76.40.	CL. 0.6252437
Tang. 2. Ang. ABC. vel AbC.	73.33.	9.4702112
Sinus Segmenti CD.	27.48.	9.4852887
Sinus Segm. Db. vel BD.	22.23.	9.5807436

Summa CD. BD. eſt BC. 40.11. *in ABC.*
Differentia CD. Db. eſt Cb. 4.35. *in AbC.*

Additio, & ſubtratio fit vti in §. 86. & 91. &c.

PRO-

PROBLEMA VI.

Datis duabus partibus alternis, & vna oppoſita.

Invenire alteram oppoſitam.

I. DATIS DVOBVS LATERIBVS, ET ALTERO Angulo oppoſito.

Invenire reliquum Angulum oppoſitum.

95 Cognitis AB. 55. 30. CB. 40. 10. & ACB. 76. 40. quæritur Angulus BAC.

Proportio §. 34.		*Gradus.*		*Logarithmi.*
Sinus lateris	*AB.*	55. 30.	CL.	0.0840063
Sinus Anguli	*BCA.*	76. 40.		9.9881319
Sinus lateris	*CB.*	40. 10.		9.8095886
Sinus Anguli	*BAC.*	49. 36.		9.8817078

II. DATIS DVOBVS ANGVLIS, ET VNO latere oppoſito.

Invenire reliquum latus oppoſitum.

Cognitis BCA. 40. 10. BAC. 49. 36. & BA. 55. 30. quæritur latus BC.

Proportio §. 34.		*Gradus.*		*Logarithmi.*
Sinus Anguli	*BCA.*	40. 10.	CL.	0.1904314
Sinus lateris	*AB.*	55. 30.		9.9159936
Sinus Anguli	*BAC.*	49. 36.		9.8816927
Sinus lateris	*BC.*	76. 40.		9.9881427

In his duabus reſolutionibus animadverti debet num latus, vel Angulus, qui egreditur maior, vel minor Quadrante exiſtat.

RATIO ALIA SOLVENDI PROBLEMATA 2. 3. 4. 5.

96 Quando partes alternæ Anguli ſunt, redigi poſſunt ad latera, & è contra, ſumendo ſemper complementum vnius, quæ neque quæſita, neque notæ alteri opponatur: veluti in *Fig.* 1. in Triangulo ROZ. Cognitis Angulis R Z O. 125. 41. R O Z. 55. 30. RZ. 22. 7. quæritur ZO.

Fiat reductio ſequenti modo.

Ang. RZO.	125. 41.	*Comp.*	*in latus AC.*	54. 19.
Ang. ROZ.	55. 30.		*in latus BA.*	55. 30.
Latus RZ.	22. 7.		*in Ang. ACB.*	22. 7.

Et in Triangulo ABC. invenietur Angulus BAC. 49. 40. per §. 93. qui æqualis eſt lateri ZO. per §. 13. Viceverſa in Triangulo Y R M. cognitis Y R. R M. RMY. quæritur Y R M. fiat reductio vt anteà.

Latus RM.	103. 28.	*Comp.*	*in Ang. ACB.*	76. 40.
Latus YR.	73. 33.		*in Ang. ABC.*	73. 33.
Ang. RMY.	54. 19.		*in latus AC.*	54. 19.

Et in Triangulo ABC. reperietur latus BC. 40. 18. per §. 94. eſtque Angulus Y R M. per §. 83. Idem dicendo de Problematibus 2. 3. 4. & 5. itaque binas ſolutiones ſingula habent.

CAPVT DECIMVM.

SINGVLARES ALIQVÆ SPHÆRICORVM resolutiones explicantur.

PROBLEMA I.

Pro Rectangulis ex Nepero.

97 CElebris est Neperi regula pro Rectangulis Sphæricis, quæ in hoc opere ommittenda non fuit.

Sit Triangulum Sphæricum Rectangulum EBH. in *Fig.*7. respondens nostro Triangulo EBH. *Fig.*1. describatur quodlibet Pentagonum; & in parte superiori collocetur Hypothenusa *eb.* deinde Anguli *e. b.* tandem latera *eb. bb.* sed partium superiorum, nempè Hypothenusæ, & Angulorum sumuntur complementa, quæ signantur hac nota ⌣, vt in Figura apparet. Pro Angulo Recto sumitur semper in proportione Sinus totus, & ideò nulla ipsius fit mentio in *Fig.*7.

98 Quælibet pars duas aliàs habet vicinas, & duas remotas: si enim sumatur Angulus *e.* partes vicinæ erunt Hypothenusa *eb.* & latus *eb.* remotæ verò *b.* & *bb.* Si autem assumatur *eb.* vicinæ sunt *e. b.* remotæ *eb. bb.* & sic de reliquis. Quibus positis.

99 *Regula Neperi.*

Pro vicinis.		*Pro remotis.*	
Vt	*Tangens vicinæ.*	Vt	*Sinus 2. remotæ.*
ad	*Sinum mediæ.*	ad	*Sinum mediæ.*
ita	*Sinus totus.*	ita	*Sinus totus.*
ad	*Tang. vicinæ reliquæ.*	ad	*Sinum 2. reliq. remot.*

VNDE NOSTRA REGVLA.

Radius, & Sinus cuiuslibet partis medij ſunt inter Tangentes vicinarum, & inter Sinus 2. remotarum. Et nè inter Sinum 2. & Tangentem æquivocatio ſubrepat: hoc carmine continentur.

Tangens vicina, remota Sinus eſto ſecundus.

100 *Praxis regulæ.*

In Triangulo EBH. data ſit Hypothenuſa EB. 50. 20. latus BH. 30. 25. quæritur latus EH. Quoniam *eb.* media eſt inter remotas *bb. eb.* erunt Radius, & Sinus *eb.* nempè complementi Hypothenuſæ medij inter Sinum 2. *bb. be.* (§. 99.) ergo erunt reciprocæ. (1. l. 6.)

Proportio.			*Logarithm.*
Vt *Sin.* 2. bh. *vel BH.*	30. 25.	CL.	0. 0643082
ad *Radium.*			10. 0000000
ita *Sin.* eb. *vel* 2. *EB.*			9. 8050385
ad *Sinum* 2. eh. *vel EH.*			9. 8693467

101 *Iiſdem datis quæritur Ang.* b.

Quia *h.* media eſt inter vicinas *eb. bb.* erunt Radius, & Sinus *b.* vel 2. B. medij inter Tangẽtem *eb. bb.* ergo erunt reciprocæ. (1. l. 6.)

Proportio.			*Logarithm.*
Vt *Radius.*		CL.	0. 0000000
ad *Tang.* eb. *vel* 2. *EB.*	50. 20.		9. 9184198
ita *Tang.* bh. *vel BH.*	30. 25.		9. 7687029
ad *Sin.* b. *vel* 2. *B.*	60. 53.		9. 8871227

102 *Iiſdem datis quæritur Ang.* e.

Quia *bb.* media eſt inter remotas *e. eb.* erit Rectangul. Radij, & Sinus *bb.* æquale Rectangulo Sinuum 2. *e.* & *eb.* (§. 99.) ergo, & reciprocæ. (1. l. 6.)

Pro-

Proportio.			*Logarithm.*
Vt *Sin. EB. vel* 2.eb.	50. 20.	CL.	0.1136384
ad *Radium.*	90. 0.		10.0000000
ita *Sin. BH. vel* bh.	20. 25.		9.7043947
ad *Sin. E. vel* 2.e.	41. 7.		9.8180331

Eadem omninò est praxis in omnibus, vndè patet primum terminum proportionis esse Radium, quoties quæritur media, vel esse extremam, si quæratur alia extrema.

103 *Demonstratio regulæ.*

Neperus regulam suam adduxit absque demonstratione, quæ tamen ex nostra *Fig.* 1. facilè demonstrari poterit. Quoties enim quæritur extrema, vel media inter remotas, eadem est proportio Neperi, & nostra, vt patet in exemplis 1. & 3. Vndè nulla alia indiget demonstratione præter adductam in superioribus.

104 Quando verò quæritur media inter extremas vicinas, vt in exemplo 2. talis est demonstratio.

Propor. 1.		*Propor. 2.*		*Propor. 3.*
Tang. EB.	Fig. 63.	*Tang. EB.*	Fig. 64.	*Radius.*
Radius.		*Radius.*		*Tang. 2. EB.*
Tang BH.		*Radius.*		*Tang. BH.*
Sin. 2. B.		*Tang. 2. EB.*		*Sin. 2. B.*

Constat ergo Neperi proportio, eademque est in alijs demonstratio.

105 *QVADRANTALIA.*

Solventur etiam ex regula Neperi, si prius convertantur latera in Anguloa, & Anguli in latera, prout dictum fuit §. 78. Quod specialem difficultatem non habet, ideòque exemplum omittitur.

PROBLEMA II.

Pro Rectangulis ex data Basi, & summa, vel differentia, *Hypothenus. & Perpend.*

106 *I. DATA SVMMA.* Fig. 1.

In Triangulo EBH. data sit Basis EH. 59. 22. & summa EB. BH. 98. 40. quæruntur determinatæ EB. & BH. oportet autem partes esse singillatim Quadrante minores, ex §. 55.

Proportio ex §. 55.			*Logarithm.*
Vt *Tang. Semisummæ.*	49. 20.	CL.	9. 9340559
ad *Tang. Semibasis.*	29. 41.		9. 7558783
ita *Tang. Semibasis.*	29. 41.		9. 7558783
ad *Tang. Semidiffer.*	15. 36.		9. 4458125
Hypoth. summa 1. & 4.	64. 56.		
Perpend. differ. 1. & 4.	33. 44.		

Quibus cognitis reliqua innotescent, ex cap. 8.

107 *II. DATA DIFFERENTIA.* Fig. 1.

In eodem Triangulo EBH. data sit Basis EH. 59. 22. & differentia Hypothenusæ, & perpendiculi 31. 12. quæruntur determinatæ EB. BH. quia ex eodem §. 55. Tangens Semibasis media est inter Tangentes Semisummæ, & Semidifferentiæ, erit invertendo rationem præcedentem.

Proportio ex §. 55.			*Logarithm.*
Vt *Tange. Semidiffer.*	15. 36.	CL.	0. 5540767
ad *Tang Semibasis.*	29. 41.		9. 7558783
ita *Tang. Semibasis.*	29. 41.		9. 7558783
ad *Tang. Semisummæ.*	49. 20.		10. 0658333
Hypoth. summa 1. & 4.	64. 56.		
Perpend. differ. 1. & 4.	33. 44.		

Reliqua ergo innotescent pariter, ex cap. 8.

PRO-

PROBLEMA III.

In Obliquangulis Sphæricis uno actu.

Ex duabus alternis, & media.

Invenire Segmenta media.

108 *I. SEGMENTA BASIS.* Fig. 1.

In Triangulo ABC. datæ sint partes alternæ Anguli B. C. & media B C. sit Angulus B. 40. 30. & Ang. C. 48. 50. Basis verò B C. 64. 8. in quam cadat perpend. A D. quæruntur Segm. B D. D C. proportio sumenda est, ex §. 52.

Proportio §. 52.			*Logarithm.*
Vt *Sin. summa Ang.*	89. 20.	CL.	0.0000293
ad *Sin. differ. Ang.*	8. 20.		9.1611638
ita *Tang. Semibasis.*	32. 4.		9.7969130
ad *Tang. Semidiffer. Segm.*	5. 11. 20.		8.9581061
Summa 3. & 4. est B D.	37. 15. 20.		
Differ. 3. & 4. est D C.	26. 52. 40.		

109 *II. SEGMENTA ANGVLI.* Fig. 1.

In eodem Triangulo A B C. sint datæ alternæ A B. 48. 50. A C. 40. 30. & Angulus comprehensus B A C. 115. 52. ex quo cadat perpendiculum A D. & quæruntur Segmenta B A D. D A C.

Proportio §. 51.			*Logarithm.*
Vt *Sin. summ. later.*	89. 20.	CL.	0.0000293
ad *Sin. differ. later.*	8. 20.		9.1611638
ita *Tang. 2. Semiang.*	57. 56.		9.7969130
ad *Tang. Semidiffer. Segm.*	5. 11. 20.		8.9581061
Summa 3. & 4. est B A D.	63. 7. 20.		
Differ. 3. & 4. est D A C.	52. 44. 40.		

Huius praxis insignem vsum pro directionibus videre licebit in Trigonometria ingeniosissimi Cavalerij, pag. 56 quem in Trigonometria applicata breviter exponam.

Del. P. I. Zaragozà. PRO-

PROBLEMA IV.

Data media Segmentis, & summa alternarum.
Invenire alternas.

I. LATERA INCLVDENTIA.

110 In Triangulo A B C. datur Ang. A B C. 115. 52. & illius Segmenta, nempè D A B. 62. 20. & C A D. 53. 32. & summa laterum includentium 89. 20. quæruntur determinata latera A B. A C. sumitur ratio ex eodem §. 51.

Proportio §. 51.			*Logarithm.*
Vt *Tang. 2. Semiang.*	57. 56.	CL.	0.2030869
ad *Tang. Semidiff. Segm.*	4. 24.		8.8861849
ita *Sin. summ. later.*	89. 20.		9.9999706
ad *Sin. differ. later.*	7. 3. 10.		9.0892424
Summa 3. & 4.	96. 23. 10.		
Eius dimidium est AB.	48. 11. 35.	*Oportet latera esse*	
Differ. 3. & 4.	82. 16. 50.	*eiusdem speciei.*	
Eius dimidium est AC.	41. 8. 25.		

II. ANGVLI INCLVDENTES.

111 In Triangulo A B C. data sit Basis B C. 64. 8. ipsius Segmenta B D. 36. 28. D C. 27. 40. & summa Angulorum includentium 89. 20. quæruntur determinati Anguli B. & C. ratio sumitur ex §. 52.

Proportio §. 52.			*Logarithm.*
Vt *Tang. Semibasis.*	32. 4.	CL.	0.2030869
ad *Tang. Semidiff. Segm.*	4. 24.		8.8861849
ita *Sin. summ. Ang.*	89. 20.		9.9999706
ad *Sin. differ. Ang.*	7. 3. 10.		9.0892424
Semisumma 3. & 4. est C.	48. 11. 35.		
Semidiffer. 3. & 4. est B.	41. 8. 25.		

Debent etiam Anguli comprehendentes esse eiusdem speciei, ex §. 51. & 52.

PRO-

PROBLEMA V.

Data media, Segmentis, & differentia alternarum.
Invenire alternas.

I. LATERA INCLVDENTIA.

112 In Triangulo ABC. datur Ang. BAC. 115. 52. & illius Segmenta BAD. 62. 20. & DAC. 53. 32. differentia verò laterum includentium AB. AC. 7. 3. 10. quæruntur determinata latera AB. AC.

Proportio ex §. 51.			*Logarithm.*
Vt *Tang. Semidiffer. Segm.*	4. 24.	CL.	1. 1138151
ad *Tang. 2. Semiang. BAC.*	57. 56.		9. 7969130
ita *Sin. differ. later.*	7. 3. 10.		9. 0892424
ad *Sin. fumm. later.*	89. 20.		9. 9999705
Semifumma 3. & 4. eſt AB.	48. 11. 35.		
Semidiffer. 3. & 4. eſt AC.	41. 8. 25.		

II. ANGVLI INCLVDENTES.

113 In eodem Triangulo ABC. datur Baſis BC. 64. 8. ipſius Segmenta BD. 36. 28. & DC. 27. 40. & differentia Angulorum includentium B. C. 7. 3. 10. quæruntur determinati Anguli B. C.

Proportio §. 52.			*Logarithm.*
Vt *Tang. Semidiffer. Segm.*	4. 24.	CL.	1. 1138151
ad *Tang. Semibaſis.*	32. 4.		9. 7969130
ita *Sin. differ. Ang.*	7. 3. 10.		9. 0892424
ad *Sin. fumm. Ang.*	89. 20.		9. 9999705
Semifumma 3. & 4. eſt C.	48. 11. 35.		
Semidiffer. 3. & 4. eſt B.	41. 8. 25.		

Vtraque ratio iſtius Problematis inverſa eſt præcedentis, & in vtraque reſolutione partes quæſitæ eiuſdem ſpeciei debent eſſe.

PROBLEMA VI.

Datis alternis, & differentia Segmentorum media.
Invenire mediam.

I. BASIM INCLVSAM.

114 In Triangulo ABC. datisunt Ang. B. 41. 8. 25. & C. 48. 11. 35. differentia verò Segmentorum BD. DC sit 8. 48. quæritur Basis BC. ex §. 52.

Proportio.			*Logarithm.*
Vt *Sinus differ. Angul.*	7. 3. 10.	CL.	0.9107575
ad *Sin. summæ Ang.*	89. 20.		9.9999706
ita *Tang. Semidiff. Segm.*	4. 24.		8.8861849
ad *Tang. Semibasis.*	32. 4.		9.7969130
ejus duplum est BC.	64. 8.		

II. ANGVLVM INCLVSVM.

115 In Triangulo ABC. data sint latera AB. AC. & sit AC. 41. 8. 25. & AB. 48. 11. 35. cadat ex Angulo BAC. perpendiculum AD. & differentia Segmentorum BAD. DAC. sit 8. 48. quæritur Angulus comprehensus BAC.

Proportio ex §. 51.			*Logarithm.*
Vt *Sin. differ. later.*	7. 3. 10.	CL.	0.9107575
ad *Sin. Summæ later.*	89. 20.		9.9999706
ita *Tang. Semidiff. Segm.*	4. 24.		8.8861849
ad *Tang. 2. Semianguli.*	57. 56.		9.7969130
ejus duplum est BAC.	115. 52.		

Vltima hæc quatuor Problemata, nempè 3. 4. 5. & 6. orta sunt ex Theorematibus adductis, §. 51. & 52. hujus libri, quæ contemnenda non sunt, licèt ad communes resolutiones non conducant.

CA-

CAPVT VNDECIMVM.

TRIANGVLORVM SOLVTIONES SINE Logarithmis explicantur.

116 Licèt in hac Trigonometria nullua sit absolutorum Sinuũm, Tangentium, & Secantium vsus, libet hic modum exponere, quo sine Logarithmis per absolutorum Canonem perficiantur, & addere compendia, quæ ad facilitandas operationes conducunt.

REGVLA VNIVERSALIS.

117 *In omni proportione superius adducta, multiplicandi sunt termini secundus, & tertius: & productus ex multiplicatione dividendus per primum, quotiens dabit quartum terminum quæsitum.*

Exemplum proportionis §. 61.

Proportio ex §. 29.		*Num. absolut.*
Sin. 2. perp. BH.	30. 25. *m.*	86236
Radius.		100000
Sin. 2. Hypoth. EB.	50. 20. *m.*	63832
Sin. 2. Basis EH.	42. 15. *m.*	74019

Ducatur 63832. in radium 100000. & productus erit 6383200000. quo diviso per primum terminum 86236. erit quotiens 74019. & est quartus terminus iuxta qualitatem proportionis, nempè *sin. 2. gr. 42. 15. m.* vt in *§. 61.* Eadem est omninò praxis in omnibus.

Reductio Radij in primum locum.

118 Quando Radius in proportione secundum, vel tertium locum occupat, vt eviretur divisio, reducetur ad primum, & primus fiet secundus, vel tertius hac arte.

Pro Sinu 1. substituatur Secans 2. pro Sinu 2. Secans 1. pro Tangente 1. Tangens 2, & pro Tangente 2. Tangens 1.

119 *Exemplum reductionis.*

Proportio ex §. 117.	*Reductio.*	*Numeri.*
Sinus 2. perpend. 30. 25.	*Radius.*	100000
Radius.	*Secans 2. perpend.*	115959
Sinus 2. Hypoth.	*Sinus 2. Hypoth.*	63832
Sinus 2. Basis.	*Sinus 2. Basis.*	74018

Ducendo igitur 115959. per 63832. erit productum 7401894888. quo diviso per Radium 100000. delendo, scilicèt ad dexteram tot litteras, quod cyphras habet Radius: quæ hìc sunt 5. remanet Quotiens 74018. nempè *fin.* 2. *gr.* 42. 15. vt anteà hac reductione evitabitur in calculo molestia divisionis.

Demonstratio huius reductionis.

Oritur ex §§. 20. & 21. *lib.* 1. Etenim quia Radius medius est inter Sinum 1. & Secantem 2. tùm inter Sinum 2. & Secantem 1. & etiam inter Tangentem 1. & 2. servatur eadem ratio, vt Sinus 2. perpendiculi ad Radium, ita Radius ad Secantem 1. sed vt Sinus 2. perpend. ad Radium, ita Sin. 2. Hypoth. ad Sin. 2. Basis, ex §. 61. Ergo vt Radius ad Sec. 1. perpend. ita Sinus 2. Hypoth. ad Sinum 2. Basis (1. l. 5.) Eadem est demonstratio de Sinu 1. & Secante 2. similiter de Tangente 1. & 2. vel de 2. & 1. quod, &c.

Quando Radius non est in proportione.

120. Pro termino primo sumitur Secans, vel Tangès oppolita, vt in §. 118. multiplicatur deinde hæc in secundum, & ex producto delentur ad dexteram tot litteræ, quot cyphras habet Radius: reliquæ verò multiplicantur in tertium; & delentur iterum litteræ: & remanet quartus terminus iuxta qualitatem proportionis, hac arte divisio, quæ prolixior, & molestior esse solet ad faciliorem multiplicationem reducitur. Exemplum sit in proportione §. 95.

Pro-

121 *Proportio.*		*Reductio.*	*Numeri.*
Sin. lateris AB.	55.30.	*Sec. 2. AB.*	121340.
Sin. lateris BC.	40.10.	*Sin. BC.*	64501.
Sin. Ang. ACB.	76.40.	*Sin. ACB.*	97304.
Sin. Ang. BAC.	49.36.	*Sin. BAC.*	76154.

Multipl. 121340. in 97304. erit productũ 11806867360. & ablatis 5. litteris remanet 1180868. hoc residuo ducto in tertium terminum 64501. oritur 76155040 68. & ablatis 5. litteris remanet 76154. quartus terminus, hoc est Sinus quæsitus Anguli BAC. 49. 36.

Demonstratio praxis præcedentis.

122 Sint proportionales A. *ad* B. vt C. *ad* D. Si A. fuerit *Sin.* 1. cuiuslibet Arcus sumatur E. *Secans* 2. vel è contra. Si verò sit A. Tang. 1. sumatur E. Tang. 2. vel è contra: termini is B. C. D. quicumque sint immutatis: cum ergo R. radius medius sit inter A. & E. (§. 20. & 21. lib. 1.) si fiat vt R. ad E. ita B. ad I. erit vt A. ad R. ita B. ad I. (1. l. 5.) & alternando vt A. ad B. ita R. ad I. (4. l. 5.) sed vt A. ad B. ita C. ad D. ex Hypothesi. Ergo vt R. ad I. ita C. ad D. quod, &c.

A. R. E.
B. I.
C.
D.

123 *Hinc praxis.* Quia R. ad E. Secantem est, vt R. ad I. inventum primum: si ducatur E. in B. & ex producto auferantur 5. litteræ, provenit I. ex §. 119. Quia verò est etiam vt R. ad I. ita C. ad D. si ducatur I. inventum primum in C. tertium terminum, & auferantur ex producto 5. litteræ, provenit D. ex §. 119. constat ergo praxis, &c.

Pro Triangulis Planis.

124 In Triangulis Planis si Radius sit in proportione, & primus terminus fuerit Sinus, vel Tangens, vt in §§. 25. 27. 30. lib. 2. observatur omninò regula, §. 118. sumendo Secantem, vel Tangentem oppositam.

125 Si autem primus terminus fuerit linea, vt in §§. 26. & 29. lib. 2. addantur ipsi cyphræ, vt numerus tot

litteras habeat, quot cyphras Radius, & quæratur numerus inter Sinus; & eius loco substituatur Secans 2. illius Sinus; & fiat operatio vt in §. 119. exemplum sit in proportione, §. 26. lib. 2.

Proportio.		*Reductio.*	*Numeri.*
Hypoth. BA.	450.00.	*Radius.*	100000
Latus BC.	345.00.	*Sec. 2. Hypoth.*	222173
Radius.	1000.00.	*Latus BC.*	34500
Sin. Ang. A.	50. 2.	*Sin. Ang. A.*	76649

126 Quia Hypothenusa 450. tres litteras habet addantur 00. vt 45000. tot litteras habeat, quot cyphras Radius. Quæro numerum hunc inter Sinus, & invenio esse Sinum gr. 26. 45. & eius Secantem 2. esse 222173. duco igitur 222173. in terminum secundum 345. additis etiam 2. cyphris, vt sit 34500. & ex producto 76649675 00. deleo 5. litteras, & remanet Sinus 76649. Anguli A. 50. 2. *Demonstratio* est ipsa §. 119. Quia Radius est medius inter Hypothenusam 45000. & Secantem 2. assumptam 222173 & 450. ad 345. est etiam vt 45000. ad 34500. constat igitur praxis.

Si Radius non sit in proportione.

127 Et primus terminus fuerit Sinus, vel Tangens observatur omninò regula, §. 120. vt in proportione §. 31 lib. 2. Si autem primus terminus fuerit linea, vt in §. 32. 34. 37. lib. 2. additis cyphris quæritur inter Sinus, & substituitur Secans 2. prout in §. 125. quæ ducitur in secundum terminum, & deletis 5. litteris residuum ducitur in tertium: deletis iterum 5. litteris remanet quartus terminus quæsitus. Exemplum sit in proportione lib. 2. §. 34.

Proportio.		*Reductio.*	*Numeri.*
Summa later.	700.00.	*Secans 2.*	142842
Differ. later.	100.00.	*Differ. later.*	10000
Tang. Semisum.	59.22.	*Tang Semisum.*	168866
Tang. Semidiffer.	13.34.	*Tang. Semidiff.*	24120

In

In Sinu 70000. invenio Secantem 142841. hac ducta in differentiam laterum 100. veladditis 2. cyphris 10000. dat 1428410000. ablatis 5. litteris remanet 14284. hoc reſiduo ducto in Tangentẽ 163866. prodit 2412081944. ablatis 5. litteris remanet 24120. Tangens Semidiffer. 13. 34. vt in lib. 2. §. 34.

128 *Demonſtratio.* Facilis eſt, quia 70000. ad 10000. eſt vt 700. ad 100. ſervant primus, & ſecundus terminus eandem rationem: deinde quia Radius medius eſt inter Sinum 70000. & Secantem ſecũdam 142841. inſtauratur, omninò demonſtratio §. 122. conſtat ergo praxis. Quod erat, &c.

Compendium multiplicationis per inverſionem.

129 Quia 10 præcedentibus operationibus abijciendæ ſunt ex producto 5. litteræ, ommitti illæ poſſunt in ipſa multiplicatione, per inverſionẽ multiplicatoris, ſcribendo ipſum inverſe ſub quantitate multiplicanda; ſit exemplum in proportione §. 76.

Proportio.		*Reductio.*	*Numeri.*
Tang. Ang. B.	60. 18.	*Radius.* 90. 00.	100000
Tang. 2. Ang. E.	45. 30.	*Tang. 2. B.* 60. 18.	57038
Radius.	90. 00.	*Tang. 2. E.* 45. 30.	98269
Sin. 2. BE.	55. 54.	*Sin. 2. EB.* 55. 54.	56050

Multiplicandus eſt 57038. per 98269.

Modus communis.

57038	
98269	
5	13343
34	2228
114	076
4563	04
51334	2
56050	67222

Modus inverſus.

Multiplicandus	57038	
Multiplicator inverſus.	96289	
	51334	2
	4562	4
	114	0
	34	2
	4.	5
Productus.	56049	

Ex modo communi apparet dimidiam operationem, quæ ad dexteram est, inutilem esse cum delendæ sint 5. vltimæ litteræ: si ergo multiplicator 98269. inverse scribatur 96289. & quæ vis littera multiplicet tantum superiorem correspondentem, & reliquas ad sinistram, & omnes multiplicationes perpendiculariter sub vltima littera scribantur: summa dabit quartum quæsitum, vt apparet; vltima ergo littera multiplicatoris 9. ducitur in totam quantitatem 57038. penultima 8. ducitur in 5703. ante penultima 2. in 570. & 6. in 57. at verò 9. tantum in 5.

130 Inversio fieri potest cuiusvis numeri ex multiplicandis, vt in eodem exemplo numeri sunt 98269. & 57038. facta huius inversione 83075. fiet multiplicatio, vt in exemplo apparet. Quando autem plures litteræ sunt in vno, quam in alio fiat inversio minoris: aliquando vltimæ etiam litteræ ad dexteram colligendæ sunt in summam, quod ipsa praxis ostendit.

Exemplum.

	98269
inverſ.	83075
	49134 | 5
	6878 | 2
	29 | 4
	7 | 2
	56049

Pro Tabularum constructione.

131 Occurrit sæpius in Tabularum constructione eundem numerum in alios ducere, vt si Tabula declinationum solis construenda sit, quia proportio est, vt Radius ad Sinum maximæ declinationis 23. 30. ita Sinus distantiæ ab Æquinoctio ad Sinum declinationis; in qua proportione multiplicandus semper est Sinus 23. 30. per Sinum distantiæ sumatur ergo Sinus, *grad.* 23. 30. nempè 39875. & illius duplum, triplum, quadruplum, &c. Et ad sinistram apponantur numeri 1. 2. 3. &c. vt apparet, & monitum fuit in Arithmetica, lib. 1. §. 14. Et vt omnes lineæ habeant æqualem litterarum numerum addatur cyphra prioribus ad sinistram, vt in exemplo.

Sin. 23. 30.
1 = 039875
2 = 079750
3 = 119625
4 = 159500
5 = 199375
6 = 239250
7 = 279125
8 = 319000
9 = 358875

Sit

132 Sit ergo inquirenda declinatio gr. 15. Arietis; diſtantia ab Æquinoctio eſt gr. 15. huius Sinus 25881. ſcribatur perpendiculariter, vt vides. Quia ergo prima littera eſt 2. aſſumo ex tabella ſuperiore lineam ſecundam; & ſcribo illam è regione ipſius 2. Deinde ſecundus numerus eſt 5. aſſumo lineam quintam, quæ ſcribitur relinquendo vnum ſpatium vacuum, & in tertia duo, &c. Similiter in ſecunda linea omittitur vna littera ad dextèram, in tertia duo, &c. Prodit ergo 10319. ſerè 10320. Sinus gr. 5. 55. declinatio quæſita, & ſic de reliquis.

Operatio.	
2—	07975,0
5—	19937
8—	3190
8—	319
1—	03
Sin.	10319

133 *RESOLVTIO TRIANGVLI.*

Ex datis 3. lateribus, vel 3. Angulis.

Praxis per numeros abſolutos ſumitur, ex §. 44. ſit in *Fig.* 1. Triangulum ABC. latus AC. 100. 15. latus AB. 85. 30. Differentia laterum 14. 45. Baſis BC. 40. 25. quæritur Ang. BAC. ſumatus *Sinus Verſus*, Baſis, & differentiæ laterum, & eorum differentia: ergo ex §. 44.

Sinus Verſus Baſis BC.	23865
Sinus Verſ. differ. later.	3295
Differ. Sinuum Verſ.	20570.

Proportio.	*Reductio §. 127.*	*Numeri.*
Sin. lat. AB.	*Sec. 2. lat. AB.*	100309
Sec. 2. lat. AC.	*Sec. 2. lat. AC.*	101621
Differ. Sin. Verſ.	*Differ. Sin. Verſ.*	20570
Sin. Verſ. Ang. A.	*Sin. Verſ. Ang. A.*	20967

134 Si ergo multiplicetur 100309. per 101622. inverſe fit 101934. Si hoc productum iterum multiplicetur per 20570. inverſe fit 20967. & eſt Sinus Verſus Anguli BAC. *grad.* 37. 47. Si dati fuerint tres Anguli, & quæratur quodlibet latus, ſumitur complementum ad 180. vnius Anguli ex includẽtibus latus quæſitum, in reliquo fit eadem operatio iuxta dicta, §. 82.

	exactis.
	100309
Inverſ.	226101
	100309
	1003
	600
	20
	2
	10193 | 4
Inverſ.	0750 | 2
	20386 | 8
	509 | 5
	70 | 7
Sin. Verſ.	20967

ALITER PER RECTILINEA, ex §. 53.

135 Quia in *Fig.* 6 Angulus Planus XAZ. æqualis eſt Sphærico BAC. & in Triangulo Plano Rectilineo innoteſcunt AZ. Tangens Semilateris AC. & AXH. vel AXZ. Tangens Semiſummæ AB. BC. & AG. Tangens Semidifferentiæ AB. BC. invenietur Angulus XAZ. qui eſt AB[illegible] lib. 2. §. 37. ſed quia operatio, licèt non iucunda, compendium nullum affert, libens illam ommitto.

FINIS.